Computação III - 2 º Semestre de 2021

Provinha 3 - 30/11/2021

Envie a sua resposta digitalizada para nmkuhl@usp.br.

Questão

Este exercício tem como finalidade provar que, para $k \geq 1$, o polinômio de grau k de uma família de polinômios ortogonais tem k raízes reais simples contidas no interior do intervalo no qual o produto interno está definido.

Para isso, considere $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e seja $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua com $\omega(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ e tal que $\int_a^b \omega(x)p(x)\,dx$ existe para qualquer polinômio p. Sabemos que

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b \omega(x)u(x)v(x)\,dx \tag{1}$$

define um produto interno no espaço dos polinômios com coeficientes reais definidos em $\mathbb{R}$. É para o produto interno acima que o resultado será demonstrado.

Seja $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma família de polinômios ortogonais em relação a (1).

(a) *Prove que para todo $k \geq 1$, p_k tem pelo menos uma raiz em (a,b).*
Sugestão: explique por que $\langle p_k, 1\rangle = 0$ para $k \geq 1$ e use este fato.

(b) *Prove que para todo $k \geq 2$, se $\bar{x}$ é uma raiz de p_k em (a,b), então ela é simples.*
Sugestão: argumente por absurdo. Suponha que $\bar{x}$ não é simples. Então podemos escrever

$$p_k(x) = (x-\bar{x})^2 q(x),$$

onde q é um polinômio de grau $k-2$. Explique por que $\langle p_k, q\rangle = 0$ e use este fato para chegar a uma contradição.

(c) *Prove que para $k \geq 2$, p_k tem k raízes em (a,b) (que, pelo item (b), são simples).*
Sugestão: argumente por absurdo. Suponha que que p_k tem exatamente $m < k$ raízes $x_1, \ldots, x_m$ em (a,b) que, pelo item (b) são simples. Então podemos escrever

$$p_k(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_m)q(x)$$

onde q é um polinômio de grau $k-m$. Explique por que q não se anula em (a,b) e por que

$$\langle p_k, q_m\rangle = 0,$$

onde $q_m(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_m)$. Use estes fatos para chegar a uma contradição.