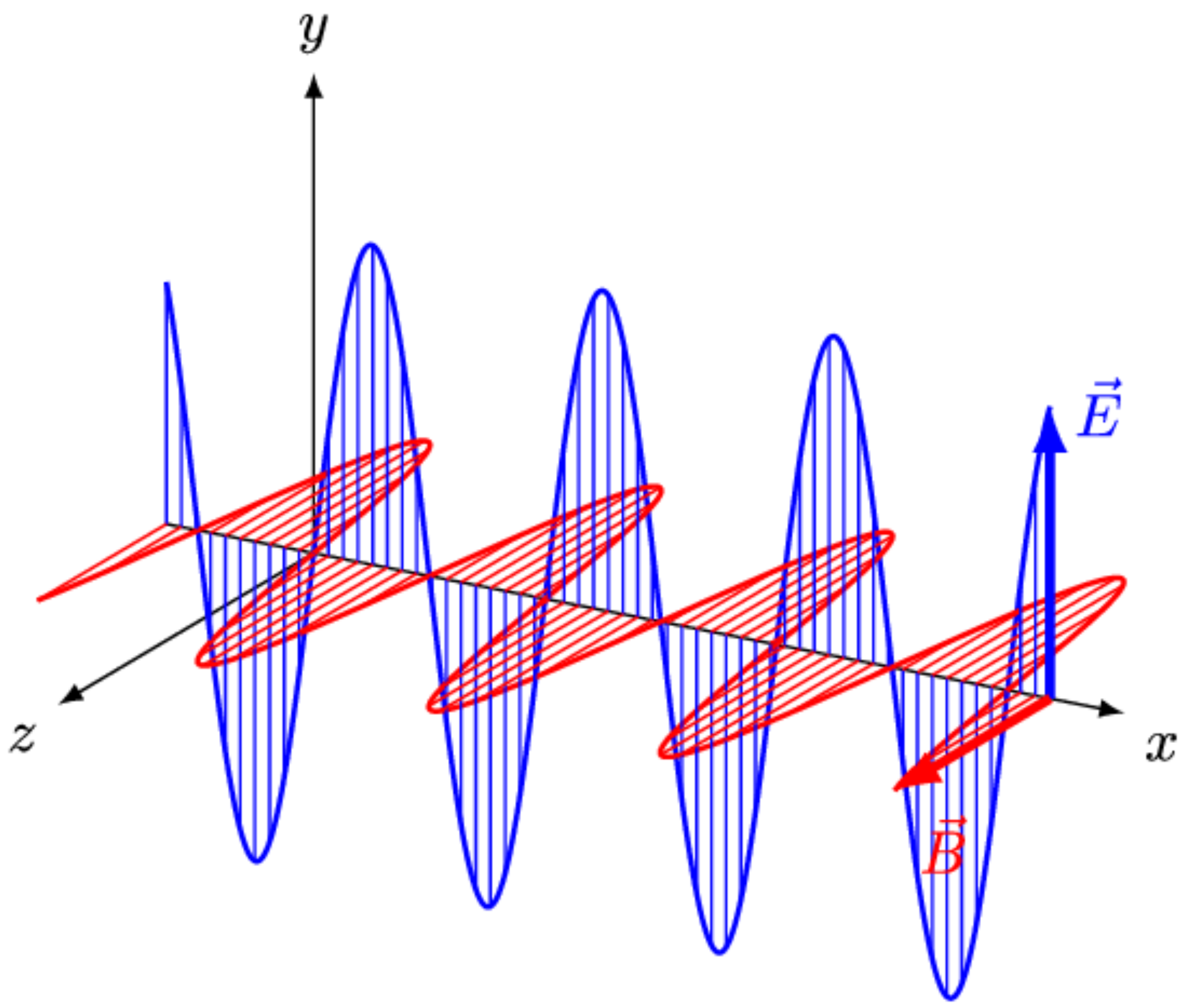
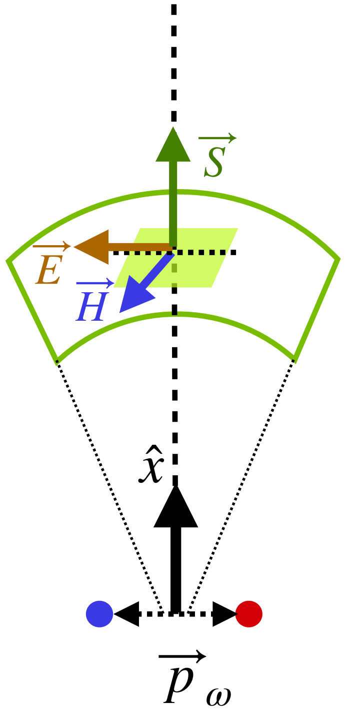


Ondas eletromagnéticas

- ⚡ Ondas planas monocromáticas
- ⚡ Campos elétricos e magnéticos e as Eqs. de Maxwell
- ⚡ Polarização das ondas eletromagnéticas
- ⚡ Energia e momento das ondas

Radiação eletromagnética



- Na aula passada encontramos uma expressão para a ***radiação eletromagnética*** de um dipolo elétrico oscilante, $\vec{p}_\omega = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$, que está localizado ***na origem***. (Por simplicidade vamos assumir o vácuo nesta parte da disciplina).

- Tomando um observador numa posição $\vec{x}$, a radiação que passa por aquele ponto pode ser escrita em termos de $\vec{k} = (\omega/c)\hat{x}$ como:

$$\vec{H}_\omega \simeq \frac{k\,c}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{k}\times\vec{p}_\omega \quad , \text{ e}$$

$$\vec{E}_\omega \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{p}_\omega) \quad , \text{ ou seja,}$$

$$\vec{E}_\omega = c\,\vec{B}_\omega\times\hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{B}_\omega = \frac{1}{c}\hat{x}\times\vec{E}_\omega$$

- O ***vetor de Poynting*** associado com essa radiação é dado por:

$$\vec{S}_\omega = \vec{E}_\omega\times\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0 c}|\vec{E}_\omega|^2\hat{x} \sim \frac{1}{r^2}\hat{x}$$

- A ***potência irradiada*** que atravessa uma casca esférica de raio r, é portanto, sempre finita :

$$P_\omega = \int d\vec{A}\cdot\vec{S}_\omega$$ o fator de r^2 da área $dA = r^2\,d^2\Omega$ cancela o fator de $1/r^2$ de $\vec{S}$!

Ondas planas

- Na maioria das vezes observamos a radiação numa ***região muito distante*** da fonte (por exemplo, quando recebemos sinais de rádio emitidos por uma antena a kms de distância de nós). Nessa aproximação, dizemos que a distância para a fonte, R, é muito maior do que o comprimento de onda, λ, ou seja:

$$kR = 2\pi \frac{R}{\lambda} \gg 1 \quad , \text{ e}$$

- Nesses casos a *onda esférica* original se torna cada vez mais próxima de uma onda plana:

$$\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \to \frac{1}{R} e^{i(kr-\omega t)} = \frac{1}{R} e^{ik(r-ct)} \quad ,$$

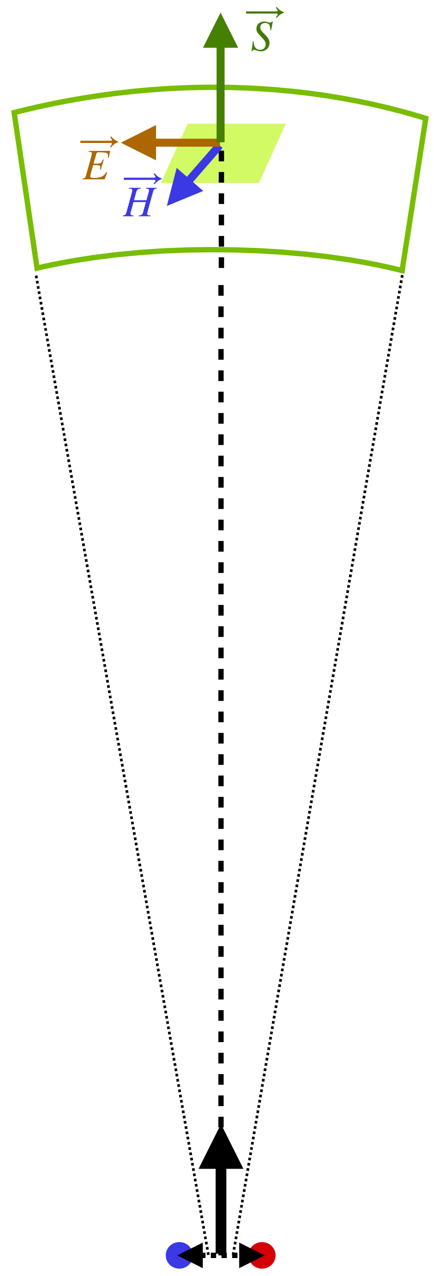
pois o fator de R no denominador varia muito pouco, mas a fase e^{ikr} varia muito rápido!

- Por exemplo, suponha que $R \sim$ 1 km, e que temos uma onda de rádio/microondas com $\lambda \sim 1$ cm. Isso significa que na vizinhança dessa posição, $R \pm 1\text{m}$, o denominador varia por um fator de $\sim 10^{-3}$ enquanto a fase varia por um fator de $kr \sim 2\pi\,(10^3\,\text{m}/1) \sim 6.\,10^3$!

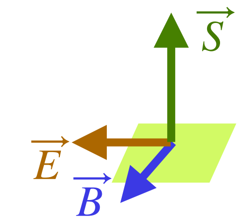
- Ou seja, para todos os efeitos temos uma onda que caminha na direção r.

- De uma maneira totalmente geral, podemos definir uma direção qualquer $\hat{n}$ no espaço, e a onda se propaga segundo a fase:

$$\vec{E}\,,\vec{B} \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$



Ondas planas



- Vamos agora juntar os resultados obtidos acima:

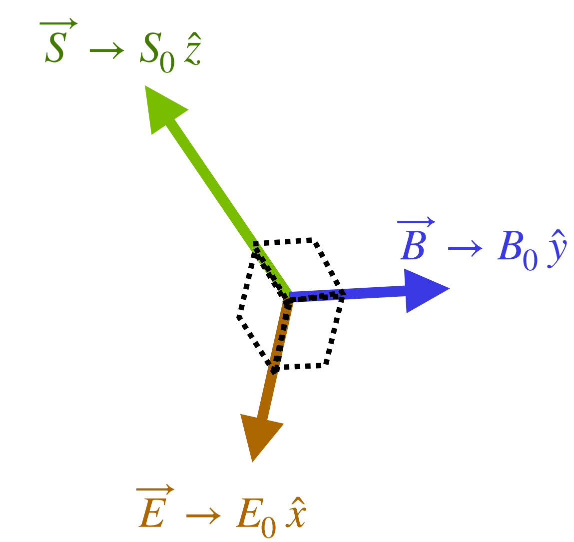
$$\vec{E}_\omega = c\,\vec{B}_\omega \times \hat{n} \quad \text{, ou} \quad \vec{B}_\omega = \frac{1}{c}\hat{n} \times \vec{E}_\omega \quad , \quad \text{com}$$

$$\vec{E}_\omega , \vec{B}_\omega \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

- Podemos escrever, então, escolhendo a direção de propagação como sendo $\hat{n} \to \hat{z}$:

$$\vec{E}_\omega = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{onde } \vec{E}_0 \text{ é uma constante}$$

$$\vec{B}_\omega = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E}_\omega = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E}_0\, e^{i(kz-\omega t)} = \vec{B}_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$



- Note que os campos são ***ortogonais*** à direção de propagação, portanto $\vec{E}_0 \cdot \hat{z} = 0$ (ou seja, $\vec{E}_0$ tem componentes apenas nas direções x, y).
- O mesmo vale para o campo magnético: $\vec{B}_\omega \cdot \hat{z} = 0$, afinal $\vec{B}_0 = (1/c)\,\hat{z} \times \vec{E}_0$
- Portanto, o campo elétrico, o campo magnético e a direção de propagação formam um quadrante. Sempre podemos escolher o nosso sistema de coordenadas de forma que:

$$\vec{E}_0 \to E_0\,\hat{x} \quad , \quad \vec{B}_0 \to B_0\,\hat{y} \quad , \quad \hat{n} \to \hat{z}$$

Equações de Maxwell

- Embora seja auto-evidente que as soluções acima satisfazem a equação de onda, ainda não verificamos que elas de fato obedecem as Eqs. de Maxwell no vácuo. Vamos fazer isso agora, para as soluções:

$$\vec{E}_0 = E_0\,\hat{x}\,e^{i(kz-\omega t)} \quad , \quad \vec{B}_0 \to B_0\,\hat{y}\,e^{i(kz-\omega t)} \quad , \text{ com } \quad B_0 = E_0/c$$

- Vamos começar com a Lei de Gauss:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right] = 0 \qquad \text{OK!}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[B_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right] = 0 \qquad \text{OK!}$$

- Agora vamos verificar a Lei de Faraday. A única componente não-trivial é na direção y:

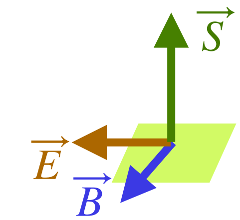
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[E_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{y} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[B_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{y} \quad \Rightarrow \quad (ik)E_0 = -(-i\omega)\frac{E_0}{c} \qquad \text{OK!}$$

- Finalmente, vamos verificar a Lei de Ampère. A única componente não-trivial é na direção x:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial z}\left[B_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[E_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{y} \quad \Rightarrow \quad -(ik)\frac{E_0}{c} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)E_0 \qquad \text{OK!}$$

- Ou seja, as soluções encontradas anteriormente satisfazem todas e cada uma das equações de Maxwell — como deveria ser!
- Em outras palavras: as propriedades das ondas eletromagnéticas, incluindo as direções nas quais os campos elétrico e magnético oscilam, são consequência direta das equações de Maxwell.

Tipos de ondas

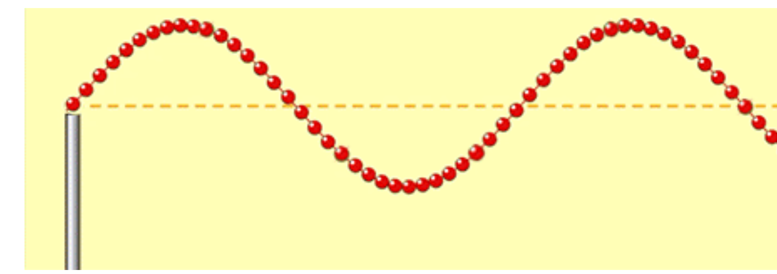


- Uma propriedade fundamental dos campos elétricos e magnéticos de radiação é que, assim como os potenciais eletromagnéticos (ϕ e $\vec{A}$), no vácuo os campos também obedecem uma ***equação de onda***:

$$\Box\phi = 0 \quad , \quad \Box\vec{A} = 0$$

$$\Box\vec{E} = 0 \quad , \quad \Box\vec{B} = 0$$

onde $\Box = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é o D'Alembertiano (operador diferencial de onda).

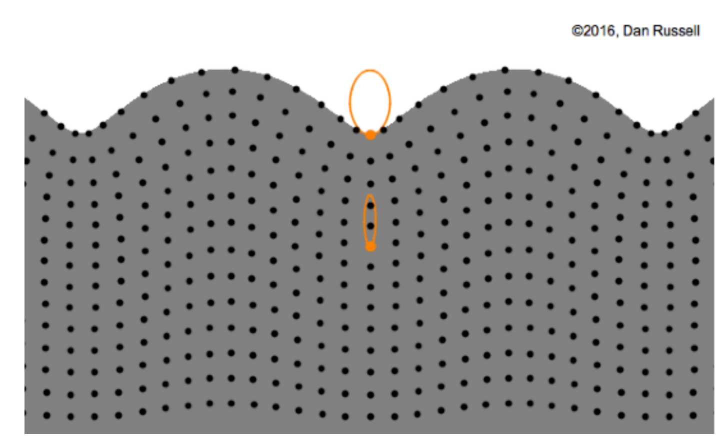


- A discussão acima mostra que as ***ondas eletromagnéticas*** são ***ondas transversais***: os "distúrbios" (no caso, os campos elétricos e magnéticos) oscilam em direções perpendiculares à direção de propagação:

$$\vec{E}\cdot\hat{n} = \vec{B}\cdot\hat{n} = 0$$

- Um outro tipo comum de onda são as ondas longitudinais, tais como o som (que é uma onda de pressão) ou ondas de compressão numa mola:

$$\Box P = 0$$



- Também existem ondas que são uma mistura dos dois tipos: por exemplo, ondas na água têm componentes longitudinais e transversais.

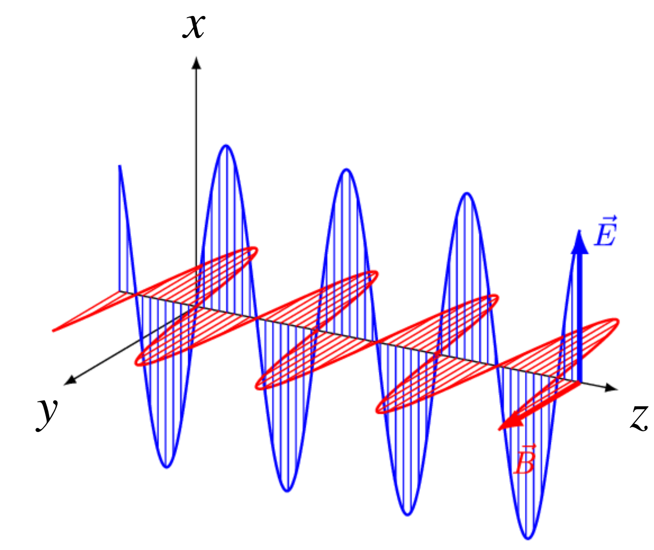
Polarização das ondas EM

- A ***direção*** (transversal!) na qual o ***campo elétrico*** oscila é chamada ***polarização*** da onda eletromagnética.
- Em particular, dizemos que uma onda cujo campo elétrico oscila numa ***única direção cartesiana*** é uma onda com ***polarização linear***. Por exemplo, uma onda com polarização linear na direção x é dada por:

$$\vec{E} = E_0\, \hat{x}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B} = B_0\, \hat{y}\, e^{i(kz-\omega t)} \quad , \text{ com } \quad B_0 = \frac{1}{c} E_0 \quad \text{e}$$

$$\vec{S} = S_0\, \hat{z}\, e^{i(kz-\omega t)} \quad , \text{ com } \quad S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2$$



- É possível também ter ***outros tipos de polarização***. Por exemplo, digamos que temos ***duas polarizações lineares*** superpostas, mas ***defasadas***:

$$\vec{E} = E_0 \left[\cos\varphi\, \hat{x}\, e^{i(kz-\omega t+\psi_x)} + \sin\varphi\, \hat{y}\, e^{i(kz-\omega t+\psi_y)} \right]$$

- A "amplitude" do campo elétrico em notação complexa é dada por:

$$|\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}* = E_0^2$$

- Note que agora a ***direção*** do campo elétrico em uma posição qualquer (por exemplo, $z = 0$), ***varia com o tempo***:

$$\vec{E}(z=0) = E_0\, e^{-i\omega t} \left[\cos\varphi\, \hat{x}\, e^{i\psi_x} + \sin\varphi\, \hat{y}\, e^{i\psi_y} \right]$$, e a parte real (física) do campo é:

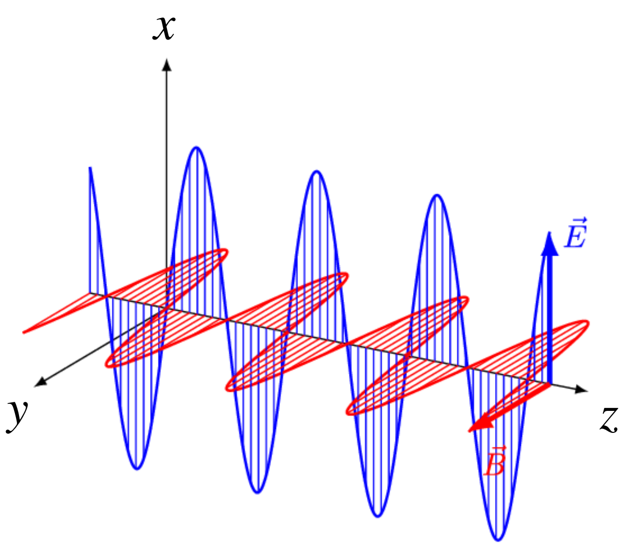
$$\mathrm{Re}[\vec{E}(z=0)] = E_0 \left[\cos(\omega t - \psi_x)\, \cos\varphi\, \hat{x} + \cos(\omega t - \psi_y)\, \sin\varphi\, \hat{y} \right]$$

- Portanto, a amplitude do campo real é dada por:

$$\left| \mathrm{Re}[\vec{E}(z=0)] \right|^2 = E_0^2 \left[\cos^2(\omega t - \psi_x)\, \cos^2\varphi \; + \; \cos^2(\omega t - \psi_y)\, \sin^2\varphi \right]$$

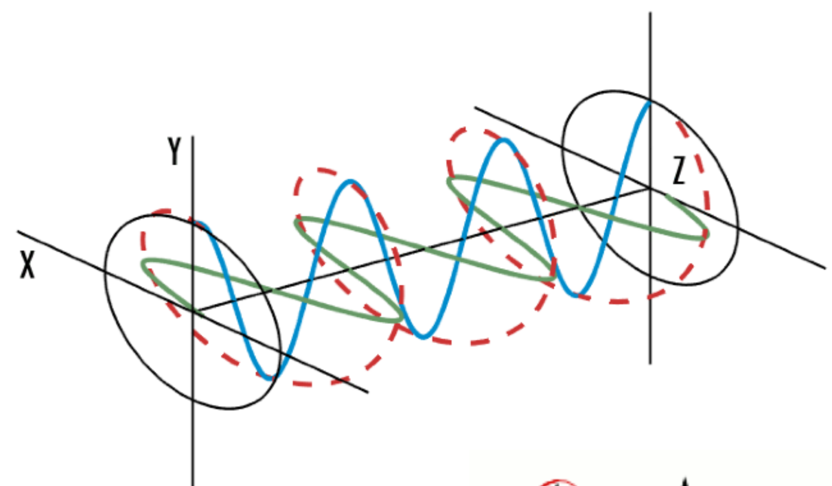
Polarização das ondas EM

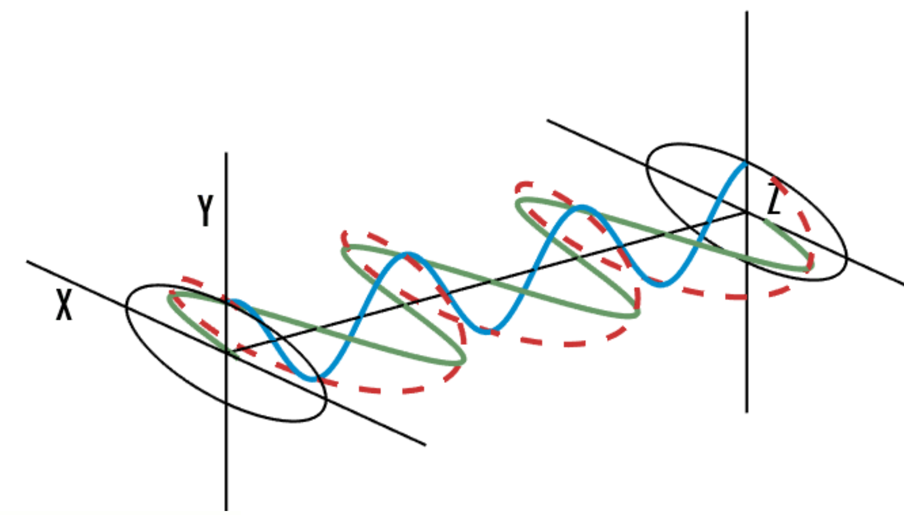
- A situação pode ser resumida em algumas classes gerais de polarizações:



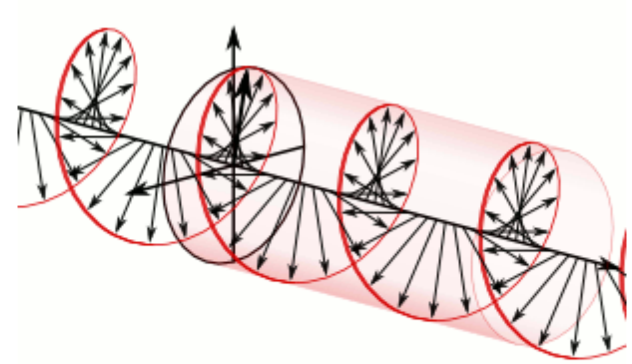
➡ Polarização ***linear***

➡ Polarização ***elíptica***





➡ Um caso particular de polarização elíptica é a ***polarização circular***



Superposição de ondas

- As Equações de Maxwell são lineares, portanto a soma de duas, três, ou infinitas soluções, também é uma solução.
- Isso significa que podemos pegar um campo elétrico que corresponde a uma certa onda plana, monocromática, de polarização linear,

$$\vec{E} = \hat{\epsilon}\, E_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$, e podemos somar muitas componentes como essa:

$$\vec{E} = \sum_j \hat{\epsilon}_j\, E_j\, e^{i(\vec{k}_j\cdot\vec{x}-\omega_j t)}$$, onde $k_j = \omega_j / c$

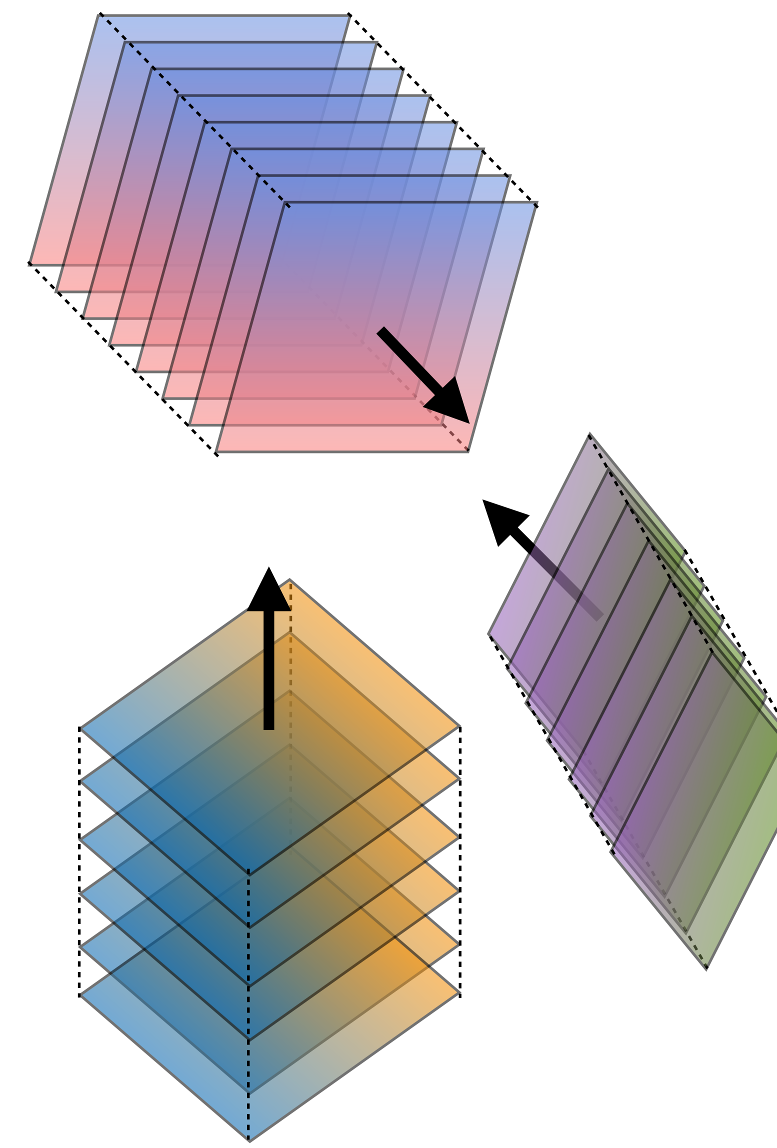
- No limite do contínuo temos uma integral sobre os "modos" $\vec{k}$:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$, e

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\hat{k}}{c} \times \tilde{\vec{E}} \right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

- No caso particular de uma onda plana monocromática com frequência ω_0 e que se propaga numa direção $\hat{k}_0$ temos :

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}) \to \vec{E}_0\, (2\pi)^3\, \delta(\vec{k} - \vec{k}_0)$$, onde, naturalmente, $\omega_0 = c\, k_0$



Energia e momento das ondas

- Antes de mais nada, devemos lembrar que uma onda plana é infinita, no tempo e no espaço. Isso significa que uma onda dessa natureza teria uma energia e um momento ***infinitos***.
- Num caso menos patológico, podemos pensar num pacote de onda, que se parece com uma onda plana, mas tem um tamanho finito. Essa onda teria, aí sim, uma energia e um momento totais finitos.
- Por outro lado, podemos pensar numa onda plana como tendo uma densidade de energia por unidade de área, que é dada pela expressão para a ***potência***:

$$dP = d\vec{A} \cdot \vec{S}$$

$$\frac{d^2 U}{dA\, dt} = \vec{S} \cdot \hat{n} \quad , \quad \text{onde } d\vec{A} = dA\, \hat{n}$$

- Um outro modo de dizer a mesma coisa é observar que o vetor de Poynting nos dá o ***fluxo*** de energia que atravessa uma dada área. Afinal,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t}$$

- Por outro lado, a ***densidade de momento*** dos campos eletromagnéticos é dada por:

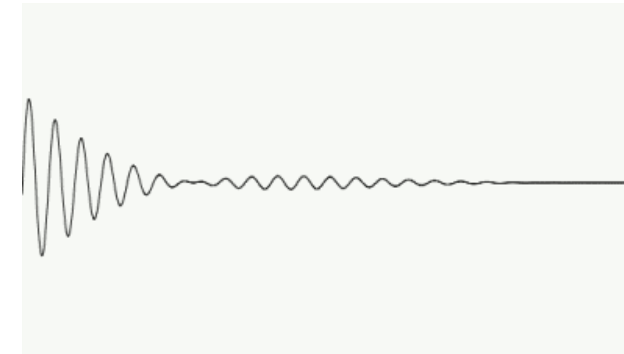
$$\vec{\pi}_{EM} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

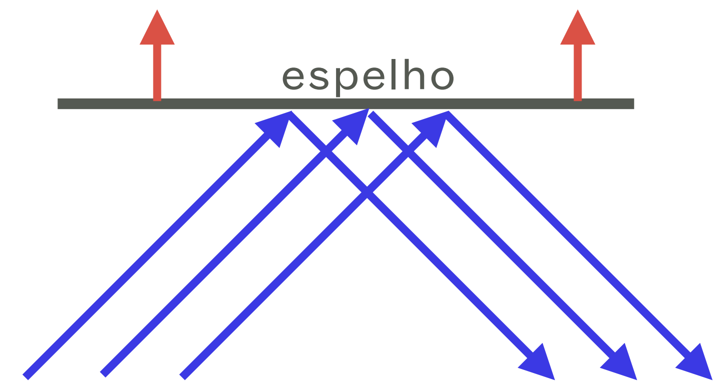
- Já a pressão da radiação numa área orientada ao longo da direção $\hat{n}$ é dada por:

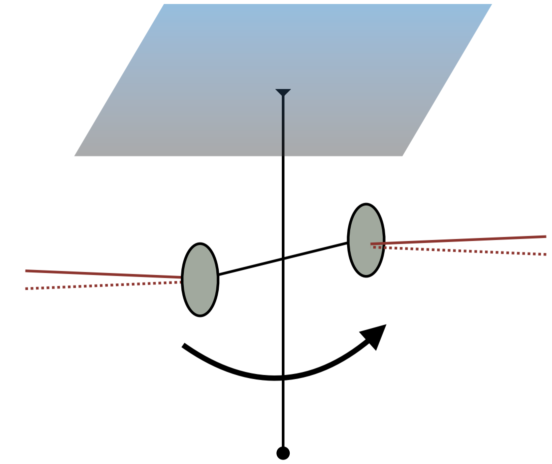
$$P_{EM} = \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \hat{n}$$

- Combinando as relações acima pode-se mostrar também que a densidade de energia de uma onda plana eletromagnética se relaciona com o momento por meio de:

$$\vec{\pi}_{EM} = \frac{1}{c} \rho_{EM}\, \hat{k} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \rho^2_{EM} - \vec{\pi}^{\,2}_{EM} c^2 = 0$$







Energia e momento das ondas

- Vamos calcular um exemplo simples: suponha que temos uma ponteira laser de cor vermelha ($\lambda \simeq 660$ nm) e com uma potência de 5 mW (mili-Watts).

- Suponha que atingimos essa ponteira num espelho de massa 1g durante 30 s numa incidência reta . Qual a quantidade de movimento transferida pela luz para esse espelho?

- Note que a potência é dada justamente pela especificação, $P = P_0 = 5$ mW. Supondo que essa potência fica dispersa numa área A , temos que o vetor de Poynting é dado por:

$$S = \frac{P}{A}$$

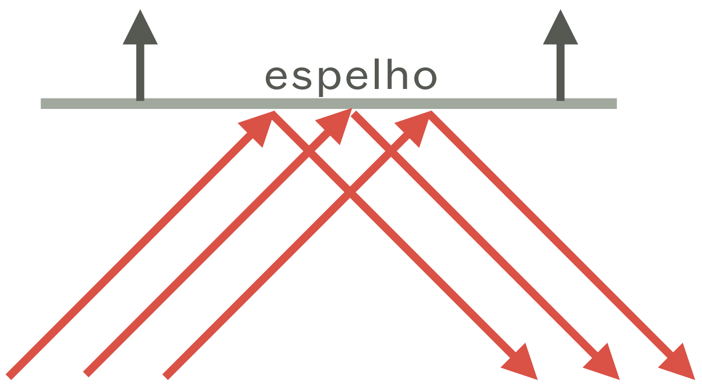
- A ***densidade de momento*** é, portanto, dada por:

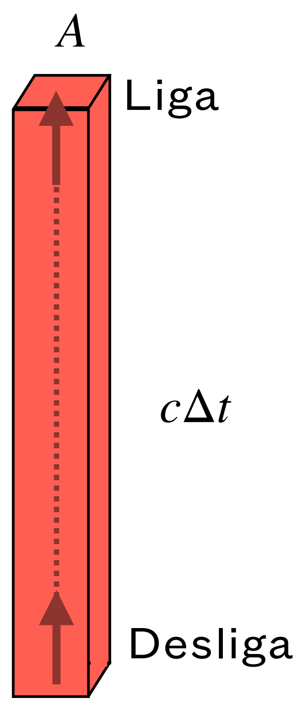
$$\vec{\pi}_{EM} = \frac{1}{c^2}\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \pi_{EM} = \frac{1}{c^2}\frac{P_0}{A}$$

- A quantidade de momento trocada com o espelho pode ser pensada como a densidade de momento π_{EM} num volume de área transversal A e comprimento $c\Delta t$, onde $\Delta t = 30$ s . Ou seja, $\Delta V = Ac\Delta t$.

$$\begin{aligned}\Delta p_{EM} = \pi_{EM}\,\Delta V &= \frac{1}{c^2}\frac{P_0}{A}\;Ac\Delta t \\ &= \frac{1}{c}P_0\,\Delta t = \frac{1}{3.\,10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\,(5.10^{-3}\mathrm{N\,m\,s^{-1}})\,(30\,\mathrm{s}) \\ &= 5.\,10^{-10}\,\mathrm{N\,s} = 5.\,10^{-10}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}\end{aligned}$$

- Ou seja, o efeito desse laser é muuuuuuito pequeno!





Próxima aula:

- Ondas eletromagnéticas: condições de contorno
- Reflexão, transmissão e refração de ondas
- Lei de Snell
- Lei de Fresnel

- Griffiths, Cap. 9