Sobre zeros de polinômios

Recordar é viver

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio de coeficientes reais ou complexos e grau $n \geq 1$. Assim, $a_n \neq 0$.

Para iniciar, vai-se recordar algumas coisas bem conhecidas e fixar-se algumas notações.

A derivada de $p(x)$ é o polinômio $p'(x)$ de grau $n-1$, $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Vai-se denotar a k-ésima derivada de $p(x)$ por $p^{(k)}(x)$. Assim, $p^{(1)}(x) = p'(x)$.

Seja k um inteiro, $1 \leq k \leq n$. Um número complexo ξ diz-se raiz de multiplicidade k do polinômio $p(x)$ se existe um polinômio de coeficientes reais ou complexos $q(x)$ tal que $p(x) = (x-\xi)^k q(x)$ e $q(\xi) \neq 0$. Uma raiz de multiplicidade 1 é chamada de raiz simples de p.

Relembre que ξ é raiz de multiplicidade k de $p(x)$ se, e somente se, $p(\xi) = p'(x) = p^{(k-1)}(\xi) = 0$ e $p^{(k)}(\xi) \neq 0$.

Um dos teoremas mais celebrados da matemática é o **Teorema Fundamental da Álgebra**.

Teorema 1 *Seja $p(x)$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$, então existe um número complexo ξ tal que $p(\xi) = 0$.*

Uma consequência imediata deste teorema é o resultado enunciado a seguir, algumas vezes também chamado teorema fundamental da álgebra.

Teorema 2 *Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$, existem números complexos $\xi_1, \ldots \xi_\ell$, dois a dois distintos, e naturais não nulos $m_1, \ldots, m_\ell$, tais que $p(x) = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (x-\xi_k)^{m_k}$*

Claro que nas condições do teorema 2, ξ_k é uma raiz de multiplicidade m_k de $p(x)$ e $\sum_{k=1}^{\ell} m_k = n$.

1 A regra dos sinais de Descartes... e o que Gauss tem a ver com isso

Aqui consideram-se apenas polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ de coeficientes reais com grau $n \geq 1$.

Tome a sequência de coeficientes de $p(x)$, $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ e desconsidere os elementos nulos desta. Seja $v(p)$ o número de trocas de sinal que há nessa sequência (após desconsiderar os zeros).

Exemplo 1

(A) Se $p(x) = x^7 - 2x^6 - x^4 - 3x^2 + 1$, a sequência é (já eliminados os zeros) $(1, -2, -1, -3, 1)$ e $v(p) = 2$.

(B) Se $p(x) = x^4 + x + 17$ a sequência é $(1, 1, 17)$ e $v(p) = 0$.

(C) Se $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, a sequência é $(1, 2, -1, -1)$ e $v(q) = 1$.

Exercício 1 *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$, com $p(0) \neq 0$.*

(i) Prove que $0 \leq v(p) \leq n$ e apresente um exemplo em que $v(p) = n$.

(ii) Suponha que $n \geq 2$ e considere $p'(x)$ a derivada de $p(x)$. Prove que $v(p')$ é igual a $v(p)$ ou é igual a $v(p) - 1$. Apresente um exemplo em que $v(p') = v(p)$ e um exemplo em que $v(p') = v(p) - 1$. (Pode supor neste item que $p'(0) \neq 0$)

A regra de sinais de Descartes-Gauss apresenta uma estimativa para o número de raízes reais estritamente positivas de $p(x)$ em função de $v(p)$.

Teorema 3 *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$. Então se $\mu(p)$ é a soma das multiplicidades das raízes reais estritamente positivas de $p(x)$ tem–se que:*

(i) $\mu(p) \leq v(p)$.

(ii) $\mu(p)$ e $v(p)$ são inteiros de mesma paridade, i.e. $v(p) - \mu(p)$ é par.

O item (i) foi enunciado pela primeira vez por Descartes em sua obra *"La Geometrie"*, um apêndice de *"Discurso sobre o método para bem conduzir a razão na busca da verdade dentro da ciência"* (em francês, *"Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences"*) em 1637. Descartes não demonstrou esse resultado, apenas o enunciou, parece que a primeira demonstração conhecida é de 1740, feita por Malves. O item (ii) é a contribuição de Gauss ao resultado e data de 1828 (com demonstração).

Em bom português a regra diz que se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ é um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$, o número de raízes estritamente positivas de $p(x)$, contadas com suas respectivas multiplicidade, é menor ou igual a $v(p)$ e, além disso, esse número tem a mesma paridade de $v(p)$.

Alguns exemplos para esclarecer o tema.

Exemplo 2

(A) Se $p(x) = x^2 - x + 1$, tem–se $v(p) = 2$. Portanto o número de raízes reais estritamente positivas de $p(x)$, contadas com sua multiplicidade, é par e é menor ou igual a 2. Ou seja, o número de raízes reais estritamente positivas de $p(x)$, contadas com sua multiplicidade, é 0 ou 2. Note que neste caso o número é igual a 0.

(B) Se $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, tem–se de novo $v(p) = 2$. Portanto, outra vez, o número de raízes reais estritamente positivas de $p(x)$, contadas com sua multiplicidade, é par e é menor ou igual a 2. Ou seja, esse número é 0 ou 2. Note que aqui o número é igual a 2, pois $p(x) = (x^2 - 1)^2$.

(C) Seja $p(x) = x^7 - 3x^5 - 2x - 1$. Nesse caso $v(p) = 1$. Portanto o número de raízes reais de $p(x)$ estritamente positivas, contadas cim sua multiplicidade, é um natural ímpar e menor ou igual a 1. Ou seja, neste caso a estimativa fornecida pela regra de Gauss-Descartes *é exata*, há precisamente uma raiz estritamente positiva de $p(x)$, e esta é simples (veja o exercício 2 adiante).

(D) Se $p(x) = x^7 - 2x^6 + x^4 - 3x^2 - 1$ então $v(p) = 3$, portanto, contando cada raíz com sua multiplicidade, tem-se que o número de raízes reais estritamente positivas é ímpar e menor ou igual a 3. Ou seja, há uma ou três raízes estritamente positivas de $p(x)$, contadas com sua multiplicidade. (Tente provar que, neste exemplo há apenas uma raiz estritamente positiva de $p(x)$ e esta é simples).

(E) Considere $p(x) = x^9 - 7x^8 - x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2$, então $v(p) = 4$. Então a regra de Gauss-Descartes permite afirmar que o número de raízes estritamente positivas de $p(x)$ é zero, 2 ou 4 (contadas com sua multiplicidade). Note que o fato de $p(0) = 0$, ou seja o termo independende de $p(x)$ ser zero, em nada interfere na aplicação da regra (no caso a sequência de coeficientes não nulos de $p(x)$ é $(1, -7, -1, 1, -2, 1)$).

Exercício 2 *Se $p(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e grau n, $n \geq 1$, e $v(p)$ é 0 ou 1, então a estimativa fornecida pela regra de Gauss-Descartes é exata (ou seja, o número de raízes estritamente positivas de $p(x)$, contadas com sua multiplicidade é $v(p)$).*

Aplicações

1.1 Raízes estritamente negativas

Pode-se usar a regra de Gauss-Descartes para obter uma estimativa do número de raízes estritamente negativas de um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e grau n, $n \geq 1$.

Para isto note que, se $q(x) = p(-x)$, então α é raiz de multiplicidade m de $q(x)$ se, e apenas se, $\lambda = -\alpha$ é raiz de multiplicidade m de $p(x)$. Essa observação tem como consequência direta o resultado enunciado a seguir.

Teorema 4 *Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais e grau n, $n \geq 1$, e considere $q(x) = p(-x)$. Então, se $\hat{\mu}(p)$ é a soma das multiplicidades das raízes estritamente negativas de $p(x)$, tem–se:*

(i) $\hat{\mu}(p) \leq v(q)$.

(ii) $\hat{\mu}(p)$ *e* $v(q)$ *tem a mesma paridade.*

Exemplo 3

(A) Considere o polinômio $p(x) = x^7 + x^5 + 17x^4 - 15x^3 - 17x - 40$. Nesse caso $q(x) = p(-x) = -x^7 - x^5 + 17x^4 + 15x^3 + 17x - 40$ e $v(q) = 2$. Portanto, contadas com suas multiplicidades, há um número par de raízes estritamente negativas, e esse número é menor ou igual a 2. Ou seja, há 0 ou 2 dessas raízes. (Prove que neste exemplo há duas raíes estritamente negativas, ambas simples)

(B) $p(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 1$. Aqui $q(x) = -x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 1$, então $v(q) = 1$ e uma análise similar à feita antes no exemplo 2-C mostra que há exatamente uma raiz real estritamente negativa de $p(x)$, e esta é simples (veja também o exercício 2).

1.2 Raízes estritamente maiores do que α

Aqui usa-se a regra de Gauss-Descartes para obter uma estimativa do número de raízes estritamente maiores do que um real α de um polinômio de coeficientes reais.

A situação é semelhante à discutida ao se encontrar uma estimativa para o número de raízes estritamente negativas, sejam $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais e grau n, $n \geq 1$, e um real α.

Considere a mudança de variáveis $y = x - \alpha$, claro que $y > 0$ se, e apenas se, $x > \alpha$. Então, basta escrever $p(x)$ ma nova variável y, aplicar a regra de Gauss–Descartes para esse polinômio em y e tem–se uma estimativa para o número de raízes reais estritamente maiores do que α.

Uma maneira de escrever o polinômio $p(x)$ na variável $y = x - \alpha$ é fazer a substituição $x = y + \alpha$, e considerar o polinômio $q_\alpha(y) = p(y + \alpha)$, que evidentemente é o polinômio desejado, ao qual deve–se aplicar a regra de Gauss-Descartes para obter uma estimativa para o número de raízes estritamente maiores do que α de $p(x)$. O resultado abaixo exprime as conclusões.

Teorema 5 *Sejam $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais e grau n, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e chame $\mu_\alpha(p)$ à soma das multiplicidades das raízes de $p(x)$ estritamente maiores do que α. Então, se $q_\alpha(y) = p(y + \alpha)$ tem–se:*

(i) $\mu_\alpha(p) \leq v(q_\alpha)$.

(ii) $\mu_\alpha(p)$ *e* $v(q_\alpha)$ *tem a mesma paridade.*

Há uma maneira mais cômoda de escrever q_α do que calcular $p(y + \alpha)$ na "força bruta", é usar que, *como $p(x)$ é um polinômio de grau n, ele ao seu polinômio de Taylor de ordem n em torno de qualquer ponto.* Portanto

$$p(x) = p(\alpha) + p'(\alpha)(x - \alpha) + \cdots + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n.$$

Faça a mudança de variável $y = x - \alpha$ na expressão acima e obtenha de pronto $q_\alpha(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} y^k$.

Um ponto interessante a destacar, para fins práticos, é que, para determinar $v(q_\alpha)$ não é necessário calcular $p^{(k)}(\alpha)$, basta determinar seu sinal. Isto facilita de modo considerável os cálculos, pois as derivadas $p^{(k)}(\alpha)$ podem ser calculadas com o uso do método dos parêntesis encaixados (método de Horner).

Exemplo 4 Vai-se obter uma estimativa para o número de raízes de $p(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$ estritamente maiores do que $\alpha = -2$, contadas com sua multiplicidade.

Para isso, escreve-se $p(x)$ usando seu polinômio de Taylor de ordem 6 em torno de α. Para isso, note que $p(-2) = -1 < 0$ e com o cálculo das derivadas de p em α obtém–se:

$p'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 2x - 1, \ \therefore p'(-2) = -9$

$p^{(2)}(x) = 30x^4 + 40x^3 - 24x^2 - 18x + 2, \ \therefore p^{(2)}(-2) > 0.$ (de fato, $p^{(2)}(-2) = 102$).

$p^{(3)}(x) = 120x^3 + 120x^2 - 48x - 18, \ \therefore p^{(3)}(-2) < 0.$

$p^{(4)}(x) = 360x^2 + 240x - 48, \ \therefore p^{(4)}(-2) > 0.$

$p^{(5)}(x) = 720x + 240, \ \therefore p^{(5)}(-2) < 0.$

$p^{(6)}(x) = 720, \ \therefore p^{(6)}(-2) > 0.$

Dessa forma, a ao tomar-se a sequência dos sinais dos coeficientes de $q_\alpha(y)$ obtém–se $(+ - + - + - -)$. Portanto $v(q_\alpha) = 5$ e conclui–se que há, contadas com sua multiplicidade, o número de raízes de $p(x)$ estritamente maiores do que -2 é ímpar e menor ou igual a 5, ou seja, esse número é $1, \ 3$ ou 5.

Exercício 3 *Prove que o número de raízes do polinômio $p(x)$ do exemplo 4 maiores ou igual a $\alpha = -2$, é 3, e todas são simples.*

Uma demonstração da regra de Descartes

Aqui apresenta-se uma demonstração da regra de Descartes, o teorema 3.

Considere um polinômio de grau n, $n \geq 1$ e coeficientes reais $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, isto é, $a_j \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Denote por $\mu(p)$ a soma das multiplicidades das raízes estritamente positivas de p, tome a sequência finita $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ dos coeficientes de $p(x)$ (tomados pela ordem decrescente de grau), desconsidere os zeros desta sequência e chame de $v(p)$ o número de trocas de sinal desta sequência (após eliminar os zeros).

Deve-se demostrar que $\mu(p) \leq v(p)$ e que os números $\mu(p)$ e $v(p)$ tem mesma paridade.

Como as raízes de $p(x)$ e de $q(x) = -p(x)$ são as mesmas e têm a multiplicidade igual, nada se perde em generalidade ao supor $a_n > 0$.

- Uma demonstração para o caso em que $a_0 \neq 0$ (i.e. $p(0) \neq 0$):

Fato 1 *$u(p)$ e $v(p)$ tem mesma paridade.*

Demonstração: Esta afirmação é consequência imediata das seguintes observações triviais:

(i) Se $a_0 > 0$ então, como a_n e a_0 tem mesmo sinal, tem–se $v(p)$ par. De modo análogo, se $a_0 < 0$ então $v(p)$ é ímpar.

(ii) Se $\overline{x}$ é uma raiz de multiplicidade ímpar de $p(x)$ então o polinômio $p(x)$ *troca de sinal em* $\overline{x}$, de modo mais formal, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $x_1 \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x})$ e $x_2 \in (\overline{x}, \overline{x} + \varepsilon)$, então $p(x_1)p(x_2) < 0$. Já se $\overline{x}$ é uma raiz de multiplicidade par de $p(x)$ então $p(x)$ *não troca de sinal em* $\overline{x}$, de modo mais formal, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $x_1 \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x})$ e $x_2 \in (\overline{x}, \overline{x} + \varepsilon)$, então $p(x_1)p(x_2) > 0$.

(iii) Note que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ (pois $a_n > 0$), então resulta de (ii) que, *se* $a_0 = p(0) > 0$ *então* $\mu(p)$ *deve ser par e, se* $a_0 = p(0) < 0$ *então* $\mu(p)$ *é ímpar.*

Portanto, segue-se de (i) e (iii) que se $a_0 > 0$ (ou, em termos mais gerais, se $a_n a_0 > 0$) então $v(p)$ e $\mu(p)$ são ambos pares e, se $a_0 < 0$ (ou, em termos mais gerais, se $a_n a_0 < 0$) então tanto $v(p)$ como $\mu(p)$ são ímpares. ∎

Para encerrar a demonstração da regra de Descartes resta provar a afirmação $\mu(p) \leq v(p)$, isso será feito por indução em n com o uso de observações simples de cálculo e uma aplicação interessante do teorema de Rolle que vai permitir comparar $\mu(p)$ e $\mu(p')$.

Lembre que se $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ a derivada de $p(x)$ é o polinômio de grau $n - 1$, $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Agora recorde que, se $\overline{x}$ é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$, então $\overline{x}$ é uma raiz de multiplicidade $m - 1$ de $p'(x)$ (em particular, se $\overline{x}$ é raiz simples de $p(x)$ então $p'(\overline{x}) \neq 0$).

Para enunciar o próximo resultado, que será o ponto principal na prova de $\mu(p) \leq v(p)$ é cômodo introduzir aqui uma notação a mais.

Seja $s^* = \min\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, a_k \neq 0\}$.

Note que como $1 \leq s^* \leq n$ e está-se a supor $a_0 \neq 0$, então $a_0 a_{s^*} \neq 0$.

O sinal de $a_0 a_{s^*}$ terá certa relevância no resultado a seguir.

Fato 2 *Para todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem–se $\mu(p') \geq \mu(p) - 1$ e, se $a_0 a_{s^*} > 0$, então $\mu(p') \geq \mu(p)$.*

Demonstração: Primeiro será mostrado que para todo polinômio tem–se $\mu(p') \geq \mu(p) - 1$.

SDe fato, se $p(x)$ não tem raízes estritamente positivas ou se tem apenas isso é óvio.

Suponha então que $p(x)$ tem ℓ raízes estritamente positivas, $\ell \geq 2$, denote-as por $x_1 < x_2 < \cdots < x_\ell$ e seja m_k a multiplicidade de x_k.

Para $\leq k < \ell$ considere $I_k = [x_k, x_{k-1}[$ e faça $I_\ell = [x_k, +\infty[$.

Em cada I_k a única raiz de $p(x)$ é x_k e sua multiplicidade é m_k, no mesmo intervalo tem–se que x_k é raiz de multiplicidade $m_k - 1$ e, para $1 \leq k < \ell$, o teorema de Rolle garante que há pelo menos uma raiz de $p'(x)$ em (x_k, x_{k+1}). Assim, para $1 \leq k \leq \ell - 1$ a soma das multiplicidades das raízes de $p'(x)$ em $I_k = [x_k, x_{k-1}[$ é $d_k \geq m_k$ e, em $I_\ell = [x_k, +\infty[$, a soma das multiplicidades das raízes de $p'(x)$ é $d_\ell \geq m_\ell - 1$.

Como em $(0, x_1)$ não raízes de $p(x)$ resulta que $\mu(p) = \sum\limits_{k=1}^{\ell} m_k$ e, portanto, $\mu(p') \geq \sum\limits_{k=1}^{\ell} d_k \geq \sum\limits_{k=1}^{\ell-1} d_k + d_\ell \geq \sum\limits_{k=1}^{\ell-1} m_k + m_\ell - 1 = \mu(p) - 1$.

Isso mostra a primeira parte do resultado, sempre vale $\mu(p') \geq \mu(p) - 1$.

Para encerrar a demonstração será provado que se $a_0 a_{s^*} > 0$ então $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz em $(0, x_1)$. Como nesse intervalo $p(x)$ não se anula, basta usar a parte já demonstrada do resultado para concluir que nesse caso $\mu(p') \geq \mu(p)$.

Considere primeiro a situação em que $a_0 = p(0) > 0$, então se $a_0 a_{s^*} > 0$ tem–se $a_{s^*} > 0$ ou seja, a primeira derivada não nula de $p(x)$ em zero é estritamente positiva, portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $p(x)$ é estritamente crescente em $(0, \varepsilon)$. Como $p(0) = a_0 > 0$ e x_1 é a menor raiz estritamente positiva de $p(x)$, isso mostra que o máximo de $p(x)$ no intervalo $[0, x_1]$ é atingido num ponto x_0 do interior desse intervalo (não pode ser atingido em zero). Portanto $p'(x_0) > 0$ e isso termina a prova.

Caso $a_0 = p(0) < 0$ então se $a_0 a_{s^*} > 0$ tem–se $a_{s^*} < 0$, portanto a primeira derivada não nula de $p(x)$ em zero é estritamente negativa, o que mostra existir $\varepsilon > 0$ tal que $p(x)$ é estritamente decrescente em $(0, \varepsilon)$. O resto da prova de $p'(x)$ ter uma raiz em $[0, x_1]$ é análoga à anterior, basta trocar ali máximo por mínimo. ∎

A prova da regra de Descartes será concluída com o uso deste resultado e da seguinte observação simples.

Como a_{s^*} é o coeficiente do termo de menor grau de $p'(x)$ é claro que:

(A) Se $a_0 a_{s^*} > 0$ os sinais de a_0 e a_{s^*} são os mesmo e portanto $v(p') = v(p)$.

(B) Se $a_0 a_{s^*} < 0$ então a_0 e a_{s^*} tem sinais diferentes, assim $v(p') = v(p) - 1$.

Agora o final da demonstração da regra de Descartes, se $a_0 \neq 0$.

Fato 3 *Se* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *é um polinômio de coeficientes reais e de grau* $n \geq 1$ *e* $p(0) \neq 0$ *então* $\mu(p) \leq v(p)$.

Demonstração: Será feita por indução em n.

O caso inicial, $n = 1$ é de todo trivial.

Suponha então que a o resultado vale para polinômios de grau n e considere $p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ um polinômio de coeficientes reais e de grau $n + 1$.

Note que $p'(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e grau n então, pela hipótese de indução, $\mu(p') \leq v(p')$.

Agora analisam-se as duas possibilidades para o sinal de $a_0 a_{s^*}$.

- Caso $a_0 a_{s^*} > 0$.
  Então, pela observação (A), pela hipótese de indução e pelo fato 2, tem–se $v(p) = v(p') \geq \mu(p') \geq \mu(p)$.

- Caso $a_0 a_{s^*} < 0$.
  Então use a observação (B), a hipótese de indução e o fato 2, para concluir que $v(p) = v(p') + 1 \geq \mu(p') + 1 \geq \mu(p)$. ∎

Exercício 4 *Faça uma demonstração da regra de Descartes para o caso* $a_0 = 0$.

2 Raízes em um intervalo: Budan e Sturm

Considere mais uma vez um polinômio $p(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ de coeficientes reais e grau $n \geq 1$. O problema que se discute aqui é *contar* o número de raíes de p que estão nym intervalo $[\alpha, \beta]$. Apresentam-se dois resultados, o teorema de Budan (também conhecido como teorema de Budan-Fourier) e o teorema de Sturm. O primeiro é uma generalização da regra de Gauss-Descartes e, como esta, fornece uma estimativa para esse número, nessa estimativa a multiplicidade das raízes é levada em conta, os cálculos envolvidos nesse resultado são simples. O segundo fornece o número exato de raízes de p no intervalo considerado, mas sua aplicação exige cálculos que, embora sejam todos algébricos sobre os coeficientes de p, são muito mais complexos e bem mais sujeitos a erros numéricos do que os envolvidos no teorema de Budan.

2.1 O Teorema de Budan, lembranças de Descartes

Considere um intervalo $[\alpha, \beta]$ em que $p(\alpha) \neq 0$ e $p(\beta) \neq 0$ (na verdade só a útima restrição importa, mas aqui vão supor-se ambas).

Como na seção 1.2, se $c \in \mathbb{R}$, considere o polinômio $q_c(y) = p(y + c)$.

Fato 4 *Seja* $p(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ *de coeficientes reais e grau* $n \geq 1$ *e tome reais* $\alpha < \beta$ *tais que* $p(\alpha)p(\beta) \neq 0$. *Chame* ρ *à soma das multiplicidades das raízes de* p *em* $[\alpha, \beta]$.

Nessas condições:

(i) $0 \leq \rho \leq v(q_\alpha) - v(q_\beta)$

(ii) Os naturais ρ *e* $v(q_\alpha) - v(q_\beta)$ *têm mesma paridade.*

A demonstração deste resultado não é apresentada aqui, embora possa ser feita de forma simples e muito similar à da Regra de Gauss-Descartes.

Note que este é um resultado de aplicação direta e simples.

Exemplo 5 Considere, como no exemplo 4, $p(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$. Vai analisar-se as raízes deste polinômio em $[-2, 1]$.

Aqui $\alpha = -2,\ \beta = 1$ e no supracitado exemplo 4 mostrou-se que $v(q_\alpha) = 5$.

Para calcular $v(q_\beta)$ vai avaliar-se o sinal de p e das suas derivadas nesse ponto, claro que $p^{(6)}(1) = 6! > 0$, além disso:

- $p(1) = -1 < 0$
- $p'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 2x - 1,\ \therefore p'(1) = 0.$
- $p^{(2)}(x) = 30x^4 + 40x^3 - 24x^2 - 18x + 2,\ \therefore p^{(2)}(1) > 0.$
- $p^{(3)}(x) = 120x^3 + 120x^2 - 48x - 18,\ \therefore p^{(3)}(1) > 0.$
- $p^{(4)}(x) = 360x^2 + 240x - 48,\ \therefore p^{(4)}(1) > 0.$
- $p^{(5)}(x) = 720x + 240,\ \therefore p^{(5)}(1) > 0.$

Portanto, ignora-se o zero de $p'(1)$ na sequêcia de sinais de q_β e tem–se que esta sequência é $(- + + + +)$, assim $v(q_\beta) = 1$.

O fato 4 mostra que o número de raízes de p em $[-1, 2]$ é, contadas com a sua multiplicidade, par e menor ou igual a $v(q_\alpha) - v(q_\beta) = 5 - 1 = 4$.

2.2 O Algoritmo de Sturm

Aqui será enunciado um resultado bem mais sofisticado do que a regra de Gauss-Descartes e do teorema de Budan, estudados nas seções anteriores, apesar de mais *poderoso* do que os resultados de Gauss-Descartes e Budan, em dois aspectos ele é mais limitado nas aplicações:

- Seu uso tem um custo computacional bem maior, e está sujeito a erros numéricos, coisa que não acontece com Gauss-Descartes.
- A regra de Descartes tem generalizaçõess que aplicam-se a classes de funções maiores do que a dos polinômios, isso não é conhecido para o algoritmo de Sturm (por exemplo, no caso de funções racionais).

Em termos simples o algoritmo de Sturm, ou teorema de Sturm, faz o seguinte, dados:

(i) um polinômio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de coeficientes reais e grau $n \geq 1$.

(ii) um intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) \neq 0$ e $p(\beta) \neq 0$.

fornece, após um número finito e determinado de adições e multiplicações (ou seja, é um *algoritmo algébrico*), determina o número de raízes de p em $[\alpha, \beta]$, de modo mais formal, calcula $\sigma = \sigma(\alpha, \beta, p) = \#\{x \in [\alpha, \beta] \colon p(x) = 0\}$.

Ao comparar este resultado com os anteriores deve salientar-se que:

- Ao contrário dos resultados de Gauss-Descartes e Budan, o número $\sigma(\alpha, \beta, p)$ supramencionado **não** leva em conta as multiplicidades das raízes de p que existem em $[\alpha, \beta]$, cada raiz é contada uma vez, independente de qual é a sua multiplicidade.
- Aqui não se apresenta uma *estimativa* do número de raízes de p em $[\alpha, \beta]$, calcula-se o **número exato** de raízes em $[\alpha, \beta]$.

A chave para o resultado de Sturm é a construção, a partir de p da *sequência de Sturm* de p, uma sequência finita de polinômios (no máximo $n+1$ polinômios) que é feita a seguir.

2.3 Sequência de Sturm de p

Seja $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$.

Considere a sequência de polinômios $h_0(x),\ h_1(x), \ldots, h_s(x)$ definida de forma indutiva por:

(I) $h_0(x) = p(x),\ h_1(x) = p'(x)$;

(II) Pra $k \geq 1$, conhecidos $h_0(x),\ h_1(x), \ldots, h_k(x)$, se $h_k(x) \equiv 0$ faça $s = k - 1$ e a sequência de Sturm de p é $(h_0(x),\ h_1(x), \ldots, h_{k-1}(x))$ e saia daqui, acabou! Caso $h_k(x)$ não seja o polinômio nulo, seja $r_{k+1}(x)$ o resto da divisão euclidiana de $h_{k-1}(x)$ por $h_k(x)$ e defina $h_{k+1}(x) = -r_{k+1}(x)$.

(III) Troque k por $k+1$ e volte ao passo anterior.

Note que, como o grau de p é $n \geq 1$, o polinômio $h_1(x)$ não é identicamente nulo, assim $s \geq 1$.

Além disso tem–se que o grau de $h_1(x)$ é $n - 1$ e, da divisão euclidiana de polinômios vem que o grau de h_k é estritamente menor do que o grau de h_{k-1}, portanto, para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ tem–se $h_{k+1}(x) \equiv 0$, o que mostra que $s \leq n$.

Exemplo 6 Determinar a sequência de Sturm de $p(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$.

Neste caso, $h_0(x) = p(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$ e $h_1(x) = p'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 1$.

A divisão euclidiana de $h_0(x)$ por $h_1(x)$ tem quociente $q_2(x) = \frac{x-1}{4}$ e resto $r_2(x) = -3x^2 - 3\frac{x-1}{4}$. Assim, $h_2(x) = -r_2(x) = 3x^2 + 3\frac{x-1}{4}$.

Ao dividir $h_1(x)$ por $h_2(x)$ obtém-se quociente $q_3(x) = \frac{4x-13}{3}$ e resto $r_3(x) = \frac{43x-25}{12}$, assim $h_3(x) = \frac{-43x+25}{12}$.

Por fim, a divisão de $h_2(x)$ por $h_3(x)$ tem quociente $q_4(x) = -\frac{36}{43}x - \frac{1287}{1849}$ e resto $r_4(x) = \frac{2219}{1849}$. Então $h_4(x) = -\frac{2219}{1849}$.

Como o grau de p é 4 tem-se que $s \leq 4$ e isso mostra que a sequência de Sturm de p é $(h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$.

Com a sequência de Sturm $(h_0(x),\ h_1(x), \ldots, h_s(x))$ de p vai-se definir agora a função contadora de Sturm ν_p, definida em $\mathcal{S}_p = \{x \in \mathbb{R} \colon p(x) \neq 0\}$.

Para $\alpha \in \mathcal{S}_p$ considere a sequência $(h_0(\alpha), h_1(\alpha), \ldots, h_s(\alpha))$ e remova os zeros dessa sequência, veja que $h_0(\alpha) \neq 0$, portanto após remover os zeros ainda existe uma sequência $(a_0, \ldots, a_\ell)$ com $0 \leq \ell \leq s$.

Defina então $\nu_p(\alpha)$ como o número de trocas de sinal que há na sequência supracitada $(a_0, \ldots, a_\ell)$.

Por exemplo, se $p(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$, tem–se $p(2) = -17,\ p(4) = -3$ e $p(5) = 121$, assim pode-se calcular ν_p nesses valores.

Com os cálculos feitos no exemplo 6, tem-se que

$$h_0(2) = -17,\ h_1(2) = -17,\ h_2(2) = \frac{51}{4},\ h_3(2) = -\frac{61}{12},\ h_4(2) = -\frac{2219}{1849}$$
$$h_0(4) = -17,\ h_1(2) = 63,\ h_2(2) = \frac{201}{4},\ h_3(4) = -\frac{49}{4},\ h_4(4) = -\frac{2219}{1849}$$
$$h_0(5) = 121,\ h_1(5) = 199,\ h_2(5) = 78,\ h_3(5) = -\frac{95}{6},\ h_4(5) = -\frac{2219}{1849}$$

portanto $\nu_p(2) = \nu_p(4) = 2$ e $\nu_p(5) = 1$.

O leitor fica convidado a mostrar que $\nu_p(0) = 3$.

Note que, dado um polinômio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de coeficientes reais e grau $n \geq 1$, todos os cálculos envolvidos para obter a sequência de Sturm de p e para calcular ν_p em um ponto envolvem apenas operações de adição e multiplicação feitas a partir dos coeficientes de $p(x)$. Podem ser cálculos tediosos e em grande quantidade (de fato, são), mas envolvem apenas essas operações, todos os cálculos, sem nenhuma exceção, são algébricos, tudo nesta subseção é "construtível".

2.4 O Teorema de Sturm

Com a parafernália vista pode-se agora enunciar o teorema de Sturm.

Teorema 6 *Seja $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$ e considere ν_p a função contadora de Sturm de p definida na subseção 2.3.*

Se $\alpha < \beta$ são reais e $p(\alpha)p(\beta) \neq 0$ então o numero de raízes de p em $[\alpha, \beta]$, contadas sem levar em conta sua multiplicidade é

$$\sigma(\alpha, \beta, p) = \#\{x \in [\alpha, \beta] : p(x) = 0\} = \nu_p(\alpha) - \nu_p(\beta).$$

Assim se $p(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$, mostrou-se na subseção 2.3 que $\nu_p(2) = \nu_p(4) = 2$ e $\nu_p(5) = 1$, então p não tem raízes em $[2, 4]$ e tem uma raiz em $[4, 5]$. Uma observação simples é que, embora não se saiba qual a multiplicidade da raiz que está em $[4, 5]$, é simples concluir que essa multiplicidade é ípar (porque?).

Na verdade o seguinte exercício é simples.

Exercício 5 *Nas condições do teorema 6 mostre que $\nu_p(\alpha) - \nu_p(\beta) > 0$ a soma das multiplicidades das raízes de p em $[\alpha, \beta]$ é par se, e só se, $p(\alpha)p(\beta) > 0$.*

As dificuldades no uso do teorema 6 são de natureza técnica, se feitos em aritmética de ponto flutuante, os cálculos envolvidos para obter a sequência de Sturm de p são amiúde bastante sujeitos a erros e imprecisões.

Exercício 6 *Considere* $p(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$ *(polinômio estudado nos exemplos 4 e 5), e prove que no intervalo* $[-2, 1]$ *este polinômio tem* 2 *raízes diferentes e ambas simples.*

Pode-se melhorar o teorema de Sturm enunciado acima, no seguinte sentido, dado um polinômio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de coeficientes reais e grau $n \geq 1$, reais $\alpha < \beta$ com $p(\alpha)p(\beta) \neq 0$ e um natural $m \in \{1, \ldots, n\}$, é possível, através *apenas de operações algébricas a partir dos coeficientes de* $p(x)$ calcular *o número de raízes de* p *em* $[\alpha, \beta]$ *que tem multiplicidade* m.

O leitor fica convidado a obter um algoritmo algébrico para resolver esse problema no caso $m = 1$ (isto é, um algoritmo que calcule o número de raízes simples de p em $[\alpha, \beta]$). Uma sugestão é criar um algoritmo a partir do teorema de Sturm com o auxílio de "algo mais"sobre polinômios, por exemplo, usar de forma conveniente o m.d.c. entre p e p'.

3 Localização de raízes de polinômios

Nesta seção seá indiferente que o polinômio $p(x)$ considerado tenha coeficientes reais, basta ser de grau $n \geq 1$ (e prova-se assim que o processo descrito acima acaba no máximo em $n + 1$ etapas).

Assim, seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio de coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, portanto $a_n \neq 0$.

O primeiro resultado que se enuncia aqui é de todo óbvio.

Fato 5 *Suponha que* $x \in \mathbb{C}$ *seja diferente de zero e tal que* $|a_n| > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|x|^{n-k}}$, *então* $p(x) \neq 0$.

Demonstração: Claro que $p(x) = x^n \left[a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^{n-k}} \right]$, então segue-se da desigualdade triangular e da hipótese que:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^{n-k}} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|x|^{n-k}} < |a_n|$$

e isto implica de pronto que $p(x) \neq 0$. ∎

Note que a desigualdade da hipótese deste resultado, $|a_n| > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|x|^{n-k}}$, pode ser reescrita como

$$1 > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|\,|x|^{n-k}}. \tag{1}$$

Uma consequência interessante destas observações é a seguinte estimativa para o maior valor absoluto das raízes de p.

Fato 6 *Se* $M = \max_{0\leq k\leq n-1} \sqrt[n-k]{\frac{|a_k|}{|a_n|}}$ *e* $z \in \mathbb{C}$ *é uma raiz do polinômio* p *então* $|z| \leq 2M$.

Demonstração: Note que, se $0 \leq k \leq n-1$, então $\frac{|a_k|}{|a_n|} \leq M^{n-k}$, agora veja que, se $x \in \mathbb{C}$ satisfaz $|x| > 2M$ tem-se:

$$\frac{|a_k|}{|a_n|}\frac{1}{|x|^{n-k}} < \frac{|a_k|}{|a_n|}\frac{1}{M^{n-k}2^{n-k}} \leq \frac{1}{2^{n-k}}.$$

Assim, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|\,|x|^{n-k}} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ o que, pelo fato 5, implica $p(x) \neq 0$. ∎

Uma estimativa de aparência similar à do fato 6 é a seguinte:

Fato 7 *Se* $L = \max_{0\leq k\leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}$ *e* z *é uma raiz do polinômio* p *então* $|z| \leq 1+L$.

Demonstração: Seja $z \in \mathbb{C}$ uma raiz de p. Se $|z| \leq 1$, é claro que o resultado é verdadeiro.

Suponha então que $|z| > 1$, considere $L_1 = \max_{0\leq k\leq n-1} |a_k|$ e use que $p(z) = 0$ e a desigualdade triangular para ver que

$$|a_n z^n| \leq \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} L_1 |z^k| = L_1 \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k.$$

Portanto, se z é raiz de p e $|z| > 1$, tem–se $|z|^n \leq \frac{L_1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k$.

Como $\frac{L_1}{|a_n|} = L$ e $\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = \frac{|z|^n - 1}{|z|-1} < \frac{|z|^n}{|z|-1}$ resulta então $|z|^n \leq L\frac{|z|^n}{|z|-1}$.
Isso mostra que, também no caso $|z| > 1$, tem-se $|z| < 1 + L$. ∎

Agora apresentam-se alguns exercícios e exemplos para aplicar e comparar os fatos 6 e 7.

Exercício 7 *Considere M e L definidos nos fatos 6 e 7.*

(i) Prove que $L \geq 1$ se, e só se $M \geq 1$.

(ii) Suponha que $L > 1$ e compare as estimativas apresentadas nos fatos 6 e 7, qual é melhor (ou seja, suponha $L \geq 1$ e compare $2M$ e $L + 1$)? ***Sugestão:*** *Considere duas situações, o caso em que $M = \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}$ e aquele em que $M > \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}$. A segunda destas situações é "simples"de ser analisada, a primeira...*

Exemplo 7 Considere $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Neste caso $L = 3$ e $M = \sqrt{3} \approx 1.732050808$. Então a estimativa fornecida pelo fato 6 é mais acurada que a vista no fato 7, pois $2M < 3.6 < 4 = L+1$. A melhor conclusão a que se pode chegar com os resultados obtidos é que todas as raízes de p (reais ou não) tem valor absoluto menor ou igual a $2\sqrt{3}$.

Exemplo 8 Seja $p(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4$.

Aqui $L = 6$ e $M = 5$, então $L + 1 = 7 < 10 = 2M$, portanto neste exemplo, a estimativa do fato 7 é a melhor, ela permite concluir que se $\xi \in \mathbb{C}$ é raiz de p então $|\xi| \leq 7$.

Exercício 8 *Considere $\alpha \in \mathbb{C}$ e o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 + \alpha$.*

(i) Mostre que se $|\alpha| \leq 6$ e $\xi \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p então $|\xi| \leq 7$.

(ii) Mostre que se $6 \leq |\alpha| \leq 9$ e $\xi \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p então $|\xi| \leq |\alpha| + 1$.

(iii) Mostre que se $9 \leq |\alpha| \leq 5^5$ e $\xi \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p então $|\xi| \leq 10$.

(iv) Mostre que se $|\alpha| > 5^5$ e $\xi \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p então $|\xi| \leq 2\sqrt[5]{|\alpha|}$.

Exercício 9 *Caso você ainda não tenha resolvido "por inteiro"a parte (ii) do exercício 7, tente fazer isso agora.*

Até aqui analisou-se a situação em que $L > 1$, agora algumas coisas do caso em que $L < 1$ (lembre que $L < 1$ se, e só se, $M < 1$).

Alguns exemplos para começar.

Exemplo 9 Considere $p(x) = x^5 - 0,9x^4 - 0.7x^3 + 0,8$.

Neste caso $L = 0,9$ e um pequeno (e direto) cálculo mostra que $M = \sqrt[5]{0,8} \approx 0,9563524998$.

Então se o número complexo ξ verifica $p(\xi) = 0$ a melhor conclusão que se pode chegar com o que foi exposto nesta seção é que $|\xi| \leq L + 1 = 1,9$ (pois $2M > 1,9$).

Exemplo 10 Seja $p(x) = x^5 - 0,9x^4 - 0.7x^3 + 0,6$.

Mais uma vez $L = 0,9$ e agora $M = \sqrt[5]{0,6} \approx 0,9028804514$.

Assim, $L + 1 = 1,9 > 1,81 > 2M$. Portanto, neste caso, se $p(\xi) = 0$ a melhor conclusão que se pode chegar com o que foi exposto nesta seção é que $|\xi| \leq 2M$,

Esses exemplos mostram que se $L < 1$ há situações em que a estimativa fornecida pelo fato 6 é melhor do que a obtida no fato 7 e há também exemplos do contrário.

Para encerrar duas obervações, uma simples e imediata pra relacionar o teorema de Sturm e os resultados desta seção, colocada na forma de exercício, e uma nada trivial, apenas para talvez motivar o leitor interessado em aplições a aventurar-se pelos caminhos do estudo de funções bem comportadas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

Primeiro o exercício simples.

Exercício 10 *Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$.*

Considere a função contadora de Sturm ν_p definida na seção 2.3 e a constante M dada no fato 6. Prove que $\nu_p(-2M) - \nu_p(2M)$ é o número de raízes reais de p (contadas sem *levar em conta a multiplicidade destas raízes).*

Agora a observação que nada tem de trivial.

Um resultado que é visto no estudo de *funções analíticas* de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ é o teorema de Rouché que é enunciado a seguir no contexto de polinômios (o resultado vale para o caso em que f e g são funções analíticas de variável complexa, seja lá o que for isso).

Fato 8 *Sejam $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ e $g(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ polinômios de coeficientes complexos e de grau, respectivamente, n e m.*

Suponha que $R > 0$ e, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = R$, tem–se $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$, então o número de raízes de f e g, contadas com sua multiplicidade, em $D_R = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| \leq R\}$ é o mesmo.

Uma aplicação imediata deste resultado de Rouché é a seguinte generalização do fato 5.

Fato 9 *Suponha que* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *é um polinômio de coeficientes complexos e grau* $n \geq 1$ *e* $R > 0$ *é um real tal que, para algum* $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *tem–se*

$$|a_\ell| R^\ell > \sum_{k=0, k\neq\ell}^{n} |a_k| R^k. \qquad (\dagger)$$

Então a soma das multiplicidades das raízes de p *em* $D_R = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| \leq R\}$ *é* ℓ.

Note que o fato 5 é um caso particular deste, na situação em que $\ell = n$.

Demonstração: Veja que, de ($\dagger$), tem–se $a_\ell \neq 0$.

Faça $f(z) = p(z),\ g(z) = a_\ell z^\ell$, e note que, se $|z| = R$ então

$$|f(z) - g(z)| = \left| \sum_{k=0, k\neq\ell}^{n} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0, k\neq\ell}^{n} |a_k| R^k < |a_\ell| R^\ell = |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|.$$

Segue-se do fato 8 que a soma das multiplicidades das raízes de $p(z)$ e $g(z)$ em D_R é a mesma e como $a_\ell \neq 0$ tem-se a tese. ∎

Aplicação:

Considere $p(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4$ que foi analisado no exemplo 8.

Como $p(2,6) = -0,21824 < 0$ tem-se que $5(2,6)^4 > (2,6)^5 + 6(2,6)^3 + 4$, assim, uma aplicação direta do fato 9 mostra que a soma das multiplicidades das raízes de p em $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 2.6\}$ é 4.

Agora veja que, no exemplo 8 viu-se que todas as raízes de p estão em $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 7\}$, então, como p tem grau 5, tem–se:

(i) A soma das multiplicidades das raízes de p em $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 2.6\}$ é 4

(ii) Há uma, e apenas uma raiz, ξ, de p tal que $2,6 < |\xi| \leq 7$ e esta raiz é simples (use o teorema fundamental da álgebra para ver isso).

(iii) Como p tem coeficientes reais, tem–se que $\xi \in \mathbb{R}$. (porque?)

Exercício 11 *Sejam* $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *e* $g(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ *polinômios de coeficientes complexos e de grau, respectivamente,* n *e* m.

Suponha que $R > 0$ *e, para todo* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| = R$, *tem–se* $|f(z) - g(z)| \leq |g(z)|$ *e prove que, então o número de raízes de* f *e* g, *contadas com sua multiplicidade, em* $D_R = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| \leq R\}$ *é o mesmo.*

Sugestão: Use que $|g(z)| \leq \ldots$ e aplique o fato 8.