UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

ENGENHARIA FÍSICA

Fenômenos de Transporte - A

Prof. Dr. Sérgio R. Montoro

sergio.montoro@usp.br

srmontoro@dequi.eel.usp.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

AULA 7

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

Nas aulas anteriores foi introduzida a equação da continuidade. Essa equação conclui que, para que a hipótese de regime permanente seja verdadeira, a massa de fluido que flui por uma seção de um tubo de corrente deve ser idêntica àquela que o abandona por outra seção qualquer.

Pode-se, então, fazer um balanço das massas ou vazões em massa entre as seções de entrada ou saída de um certo escoamento.

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

Com base no fato de que a energia não pode ser criada nem destruída, mas apenas transformada, é possível construir uma equação que permitirá fazer o balanço das energias, da mesma forma como foi feito para as massas, por meio da equação da continuidade.

A equação que permite tal balanço chama-se equação da energia e nos permitirá, associada à equação da continuidade, resolver inúmeros problemas práticos como, por exemplo: determinação da potência de máquinas hidráulicas, determinação de perdas em escoamento, transformação de energia, etc.

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

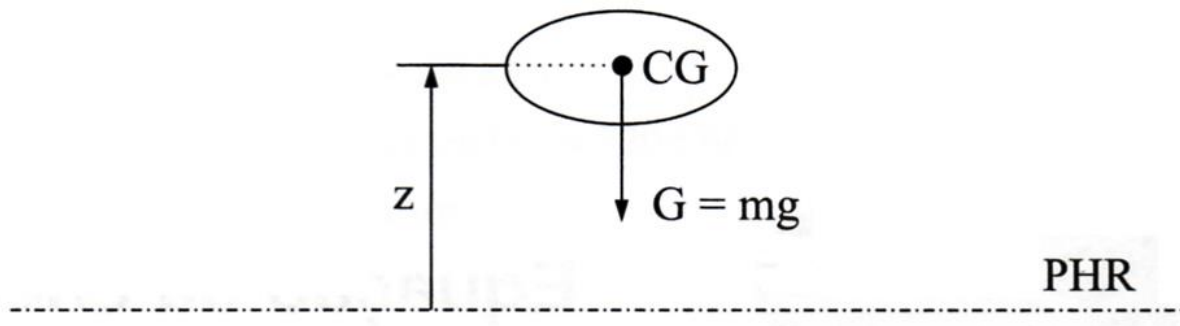
Tipos de energias mecânicas associadas a um fluido

A – ENERGIA POTENCIAL (E_P)

É o estado de energia do sistema devido à sua posição no campo de gravidade em relação a um plano horizontal de referência (PHR).

Essa energia é medida pelo potencial de realização de trabalho do sistema. Seja, por exemplo, um sistema de peso G = mg, cujo centro de gravidade está a uma cota z em relação a um PHR, conforme mostrado na figura a seguir.

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE



Como: Trabalho = Força x Deslocamento

Então: $W = Gz = mgz$

Mas, pelo que foi dito anteriormente, $E_P = W$; logo:

$$\boxed{E_P = mgz}$$

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

Note-se que, na equação, que será introduzida posteriormente, interessará somente a diferença das energias potenciais de um ponto a outro do fluido, de forma que a posição do PHR não alterará a solução dos problemas. Isto é, o PHR é adotado arbitrariamente, conforme a conveniência da solução do problema.

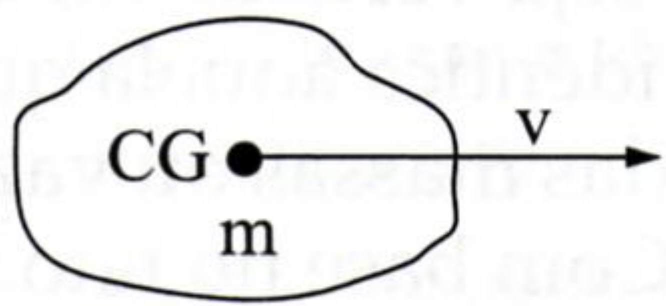
EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

B – ENERGIA CINÉTICA (E_C)

É o estado de energia determinado pelo movimento do fluido.

Seja um sistema de massa m e velocidade v; a energia cinética será dada por:

$$\boxed{E_C = \frac{mv^2}{2}}$$



EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

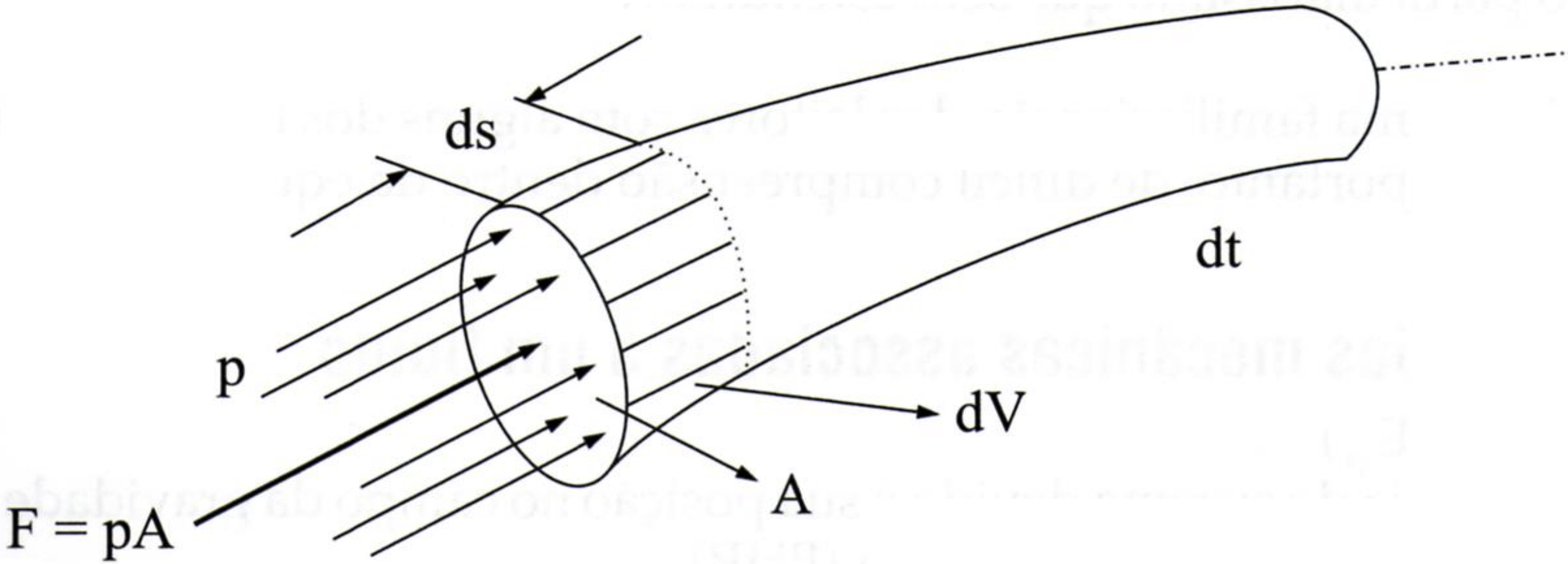
C – ENERGIA DE PRESSÃO (E_{PR})

Essa energia corresponde ao trabalho potencial das forças de pressão que atuam no escoamento do fluido. Seja, por exemplo, o tubo de corrente da figura a seguir.

Admitindo que a pressão seja uniforme na seção, então a força aplicada pelo fluido externo no fluido do tubo de corrente, na interface de área A, será F = pA. No intervalo de tempo dt, o fluido irá se deslocar de um ds, sob a ação da força F, produzindo um trabalho:

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

$$dW = Fds = pAds = pdV$$



Por definição: $dW = dE_{pr}$

e portanto: $dE_{pr} = pdV$

EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA REGIME PERMANENTE

Ou

$$E_{PR} = \int_{v} p dV$$

D – ENERGIA MECÂNICA TOTAL DO FLUIDO (E)

Excluindo-se energias térmicas e levando em conta apenas efeitos mecânicos, a energia total de um sistema de fluido será:

$$E = E_p + E_c + E_{pr}$$

ou

$$\boxed{E = mgz + \frac{mv^2}{2} + \int_V pdV}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Conforme foi citado anteriormente, a equação da energia geral será construída aos poucos, partindo-se de uma equação mais simples, válida somente para uma série de hipóteses simplificadoras.

É óbvio que cada hipótese admitida cria um afastamento entre os resultados obtidos pela equação e os observados na prática. A equação de Bernoulli, devido ao grande número de hipóteses simplificadoras, dificilmente poderá produzir resultados compatíveis com a realidade.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

No entanto, é de importância fundamental, seja conceitualmente, seja como alicerce da equação geral, que será construída pela eliminação gradual das hipóteses da equação de Bernoulli e pela introdução dos termos necessários, para que a equação represente com exatidão os fenômenos naturais.

As hipóteses simplificadoras são:

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A – regime permanente;

B – sem máquina no trecho de escoamento em estudo. Entenda-se por máquina qualquer dispositivo mecânico que forneça ou retire energia do fluido, na forma de trabalho. As que fornecem energia ao fluido serão denominadas ‘bombas’ e as que extraem energia do fluido, ‘turbinas’.

C – sem perdas por atrito no escoamento do fluido ou fluido ideal;

D – propriedades uniformes nas seções;

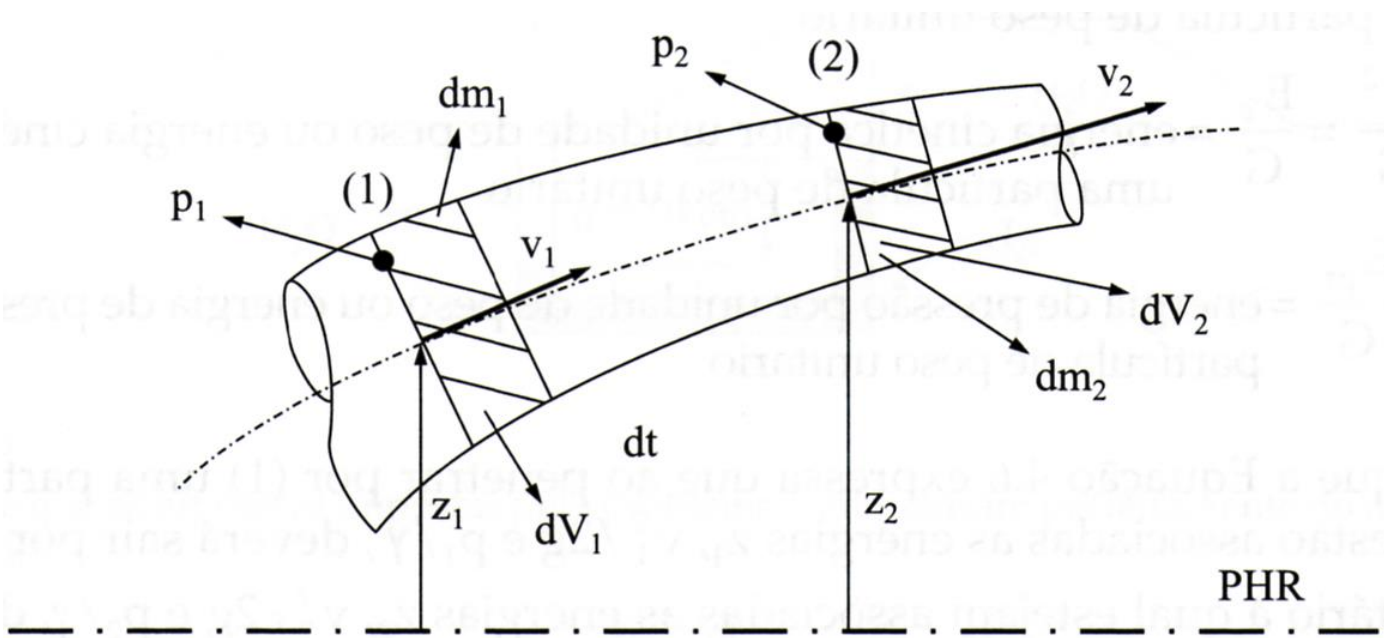
E – fluido incompressível;

F – sem trocas de calor.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Pelas hipóteses (b), (c) e (f) exclui-se que no trecho de escoamento em estudo seja fornecida ou retirada energia do fluido.

Seja o tubo de corrente da figura abaixo, entre as seções (1) e (2).



EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Deixando passar um intervalo de tempo dt, uma massa infinitesimal dm_1 de fluido a montante da seção (1) atravessa-a e penetra no trecho (1)-(2) acrescentando-lhe a energia:

$$dE_1 = dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 v_1^{\ 2}}{2} + p_1 dV_1$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Na seção (2), uma massa dm_2 do fluido que pertencia ao trecho (1)-(2) escoa para fora, levando a sua energia:

$$dE_2 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 {v_2}^2}{2} + p_2 dV_2$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Como pelas hipóteses (b), (c) e (f) não se fornece nem se retira energia do fluido, para que o regime seja permanente é necessário que no trecho (1)-(2) não haja variação de energia, o que implica obrigatoriamente que:

$$dE_1 = dE_2$$

ou

$$\boxed{dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 v_1^{\,2}}{2} + p_1 dV_1 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 v_2^{\,2}}{2} + p_2 dV_2}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Como:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$ e portanto $$dV = \frac{dm}{\rho}$$ tem-se:

$$\boxed{dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 {v_1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} dm_1 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 {v_2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} dm_2}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Como o fluido é incompressível, $\rho_1 = \rho_2$ e, como o regime é permanente, $dm_1 = dm_2$.

Portanto:

$$\boxed{gz_1 + \frac{v_1^{\,2}}{2} + \frac{p_1}{\rho} = gz_2 + \frac{v_2^{\,2}}{2} + \frac{p_2}{\rho}}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Dividindo a equação por g e lembrando que $\gamma = \rho g$, tem-se:

$$\boxed{z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}}$$

A equação acima é a **equação de Bernoulli**, que permite relacionar cotas, velocidades e pressões entre duas seções do escoamento do fluido.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A seguir, será indicado o significado dos termos dessa equação.

$$z = \frac{mgz}{mg} = \frac{E_P}{G}$$ $\Rightarrow$ Energia potencial por unidade de peso ou energia potencial de uma partícula de peso unitário.

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2gm} = \frac{mv^2}{2G} = \frac{E_C}{G}$$ $\Rightarrow$ Energia cinética por unidade de peso ou energia cinética de uma partícula de peso unitário.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{pV}{\gamma V} = \frac{pV}{G} = \frac{E_{PR}}{G}$$ $\Rightarrow$ Energia de pressão por unidade de peso ou energia de pressão da partícula de peso unitário.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Note-se então, que a Equação de Bernoulli expressa que ao penetrar por (1) uma partícula de peso unitário, à qual estão associadas as energias z_1, $v_1^2/2g$ e p_1/γ, deverá sair por (2) uma partícula de peso unitário à qual estejam associadas as energias z_2, $v_2^2/2g$ e p_2/γ, de forma que a soma delas seja idêntica à soma em (1) para manter a energia constante no volume entre (1) e (2).

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Uma observação importante é que, sendo z uma cota, então será medida em unidade de comprimento (por exemplo, em metros); logo, tanto $v^2/2g$ como p/γ também serão medidos dessa forma. Não devemos esquecer que, apesar disso, cada uma das parcelas da Equação de Bernoulli tem o significado de energia por unidade de peso.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Notemos ainda que em aulas anteriores que a carga de pressão foi definida como sendo $h = p/\gamma$. Logo, a energia de pressão por unidade de peso é a própria carga de pressão. Por analogia, serão denominadas:

z = carga potencial

$v^2/2g$ = carga da velocidade ou carga cinética

Observe que a palavra ‘carga’ substitui a expressão ‘energia por unidade de peso’.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Fazendo:

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$$

Onde: H = energia total por unidade de peso numa seção ou carga total na seção.

Com a noção de carga total, a Equação de Bernoulli poderá ser escrita simbolicamente:

$$H_1 = H_2$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Essa equação poderá ser enunciada da seguinte forma:

Se, entre duas seções do escoamento, o fluido for incompressível, sem atritos, e o regime permanente, se não houver máquina nem trocas de calor, então as cargas totais se manterão constantes em qualquer seção, não havendo nem ganhos nem perdas de carga.

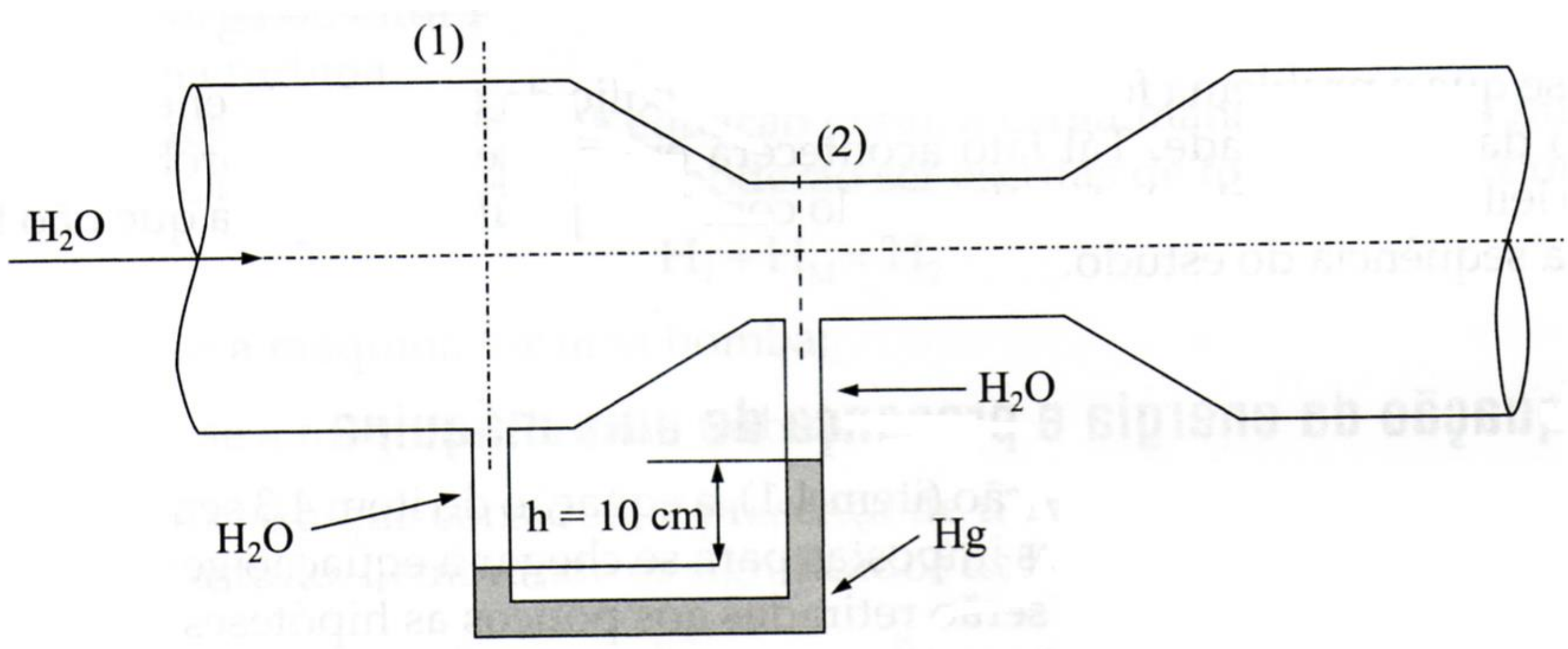
EQUAÇÃO DE BERNOULLI

EXEMPLO 1:

Água escoa em regime permanente no Venturi da figura. No trecho considerado, supõem-se as perdas por atrito desprezíveis e as propriedades uniformes nas seções. A área (1) é 20 cm^2, enquanto a da garganta (2) é 10 cm^2. Um manômetro cujo fluido manométrico é mercúrio (γ_{Hg} = 136.000 N/m^3) é ligado entre as seções (1) e (2) e indica o desnível mostrado na figura. Pede-se a vazão da água que escoa pelo Venturi (γ_{H2O} = 10.000 N/m^3).

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

FIGURA DO EXEMPLO 1:



EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Note que as hipóteses impostas pelo problema o enquadram perfeitamente no uso da equação de Bernoulli.

$$\boxed{z_1 + \frac{{v_1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{{v_2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Os centros geométricos das seções (1) e (2) têm a mesma cota z, qualquer que seja o PHR adotado.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

O segundo membro dessa expressão pode ser determinado pelo manômetro diferencial instalado.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Mas, antes disso, é interessante notar que, pela equação da continuidade, sendo $A_2 < A_1$, tem-se $v_2 > v_1$, e como a energia cinética aumenta de (1) para (2), a energia de pressão deverá diminuir para que a soma seja constante.

Essa observação explica o porquê de o manômetro estar desnivelado da esquerda para a direita, já que $p_1 > p_2$.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Partindo do centro geométrico da seção (1) e desprezando os trechos comuns aos dois ramos do manômetro, e equação manométrica ficará:

$$p_1 + \gamma_{H2O}.h - \gamma_{Hg}.h = p_2$$

$$p_1 - p_2 = (\gamma_{H2O} - \gamma_{Hg}).h$$

Logo,

$$p_1 - p_2 = (136.000 - 10.000) \times 0,1 = 12600 \text{ N/m}^2$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

$$p_1 - p_2 = (136.000 - 10.000) \times 0{,}1 = 12600\ N/m^2$$

Ou,

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{12.600}{\gamma} = \frac{12.600}{10.000} = 1{,}26\ m$$

Ou, adotando $g = 10\ m/s^2$,

$$v_2^2 - v_1^2 = 25{,}20\ m^2/s^2$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Como a equação da energia conduz a uma equação com duas incógnitas, haverá necessidade de outra equação que relacione as velocidades, que é a equação da continuidade.

Pela equação da continuidade,

$$Q_1 = Q_2$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{v_2}{2}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Logo,

$$v_2^2 - \frac{v_2^2}{4} = 25{,}20$$

Ou,

$$\frac{4.\,v_2^2 - v_2^2}{4} = 25{,}20 \quad \Rightarrow \quad \frac{3.\,v_2^2}{4} = 25{,}20$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{4 \times 25{,}20}{3}} = 5{,}8\ m/s}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 1:

Logo,

$$Q = v_2A_2 = 5{,}8 \times 10 \times 10^{-4} = 5{,}8 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

Ou,

$$\boxed{Q = 5{,}8\ L/s}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

EXEMPLO 2:

Determinar a velocidade do jato do líquido no orifício do tanque de grandes dimensões da figura. Considerar fluido ideal.