1

Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática

Carmen Gómez-Granell
IMIPAE, Prefeitura de Barcelona

Durante séculos, o pensamento e a lógica formal foram considerados protótipos da racionalidade humana. Em contraposição, o conhecimento cotidiano é definido como aquele que não está incluído nas fronteiras do conhecimento formal ou acadêmico. Em geral, esse conhecimento é definido de forma negativa ou deficitária (intuitivo em oposição a dedutivo, particularista em oposição a geral, concreto em oposição a abstrato, etc.).

Como o conhecimento cotidiano muitas vezes não se adapta aos padrões do raciocínio e da lógica formal, costuma ser interpretado como fundamentalmente irracional. Essa crença tem tudo a ver com uma epistemologia positivista, que tradicionalmente tem considerado a lógica formal como o padrão e o cânone ideal da racionalidade. Vem daí a consolidada crença de que existem duas formas de pensamento: uma civilizada, racionalmente científica e mais evoluída que a outra, primitiva e não-racional.

Essa concepção é coerente com o projeto racionalista da filosofia e da ciência moderna. Em conseqüência de seu alto poder explicativo e mediático, o pensamento abstrato e científico é considerado o nível mais evoluído de conhecimento, ao qual o ser humano tende de forma natural e biológica. Como ressalta Toulmin, o projeto ocidental da racionalidade concebe o progresso, tanto individual como coletivo, como uma transição irreversível do particular ao universal, do local ao geral, do temporal ao intemporal.

Como sabemos, a psicologia também tem obedecido fundamentalmente a esse padrão racionalista em um duplo sentido: caracterizar o desenvolvimento mental por uma tendência natural a formas mais elevadas e abstratas de raciocínio (as operações formais, no caso de Piaget, ou os conceitos científicos, no de Vygotsky) e considerar as formas de representação desse raciocínio como seu objeto fundamental de estudo. Sob esse ponto de vista, o pensamento científico, cujo aparecimento tanto ontogenético como filogenético é posterior ao do pensamento de tipo cotidiano ou intuitivo, seria um pensamento mais potente e evoluído, e sua aquisição envolveria o desaparecimento das formas mais primitivas de pensamento. O homem desenvolvido é o homem racional, que aplica de forma consistente as leis da lógica.

Esse conceito restrito de racionalidade, no entanto, que a enquadra nas estreitas margens da lógica, está sendo amplamente questionado, tanto a partir da psicologia como da própria epistemologia científica. Fortalece-se progressivamente a idéia de que a racionalidade é um conceito mais amplo do que a lógica, e que nem a ciência nem a razão humana podem ser reduzidas por completo aos princípios da lógica formal.

Os conhecidos trabalhos de Johnson-Laird, Daniel Kahneman, Amos Tversky ou Wason e D'Andrade sobre a racionalidade pragmática; os diferentes e numerosos estudos sobre o conhecimento cotidiano (J. M. Puckett e H. W. Reese, orgs., 1993; M. Chapman, 1993; R. J. Stenberg, 1993); ou o estudo das crenças, concepções prévias ou teorias pessoais, que alguns autores cunharam com o nome de "teorias implícitas" devido ao seu caráter não-acessível à consciência (Nisbert e Ross, 1980; Rodrigo e outros, 1993), são alguns exemplos das tentativas da psicologia científica para ir além do estudo da racionalidade lógica e para caracterizar as formas e os modos de representação do conhecimento cotidiano.

Todos esses trabalhos provaram que, em geral, o raciocínio dos seres humanos não obedece à aplicação das leis da lógica formal, e que o conhecimento cotidiano parece ser mais representativo da cognição humana que o formal. Não se pode inferir do fato de que o pensamento cotidiano algumas vezes não se ajuste às leis da lógica, que ele seja "irracional"; apenas corresponde a outro tipo de "racionalidade", de caráter mais pragmático.

Tudo isso faz com que a psicologia tenha de enfrentar a necessidade de aceitar a existência e a validade de numerosas formas de conhecimento e pensamento, e de não considerar o pensamento abstrato, formal e lógico como o hegemônico e o melhor para qualquer contexto e situação, pois ele não passa de um tipo específico de conhecimento. Um conhecimento que nasceu na antiga Grécia, em função de determinadas condições socioculturais e políticas (Havelock, 1983). Sua finalidade, ao contrário do pensamento cotidiano, não é ser útil para determinado caso ou contexto particular, mas transcender o particular para explicar a realidade mediante modelos mais gerais. O pensamento científico e o pensamento cotidiano obedecem a epistemologias diferentes porque, entre outras coisas, têm finalidades muito distintas.

1. Os limites difusos entre pensamento científico, cotidiano e escolar

Numerosos estudos já foram realizados para descrever as características do pensamento cotidiano e suas diferenças em relação ao pensamento científico ou formal. Ginsburg (1987) ou Reiter (1987), por exemplo, utilizaram a expressão "raciocínio não-monótono" para explicar algumas características do pensamento cotidiano. Fundamentalmente, esse tipo de raciocínio caracteriza-se por estar baseado em crenças que se confirmam pela ausência de outras que as contradigam, e não com base em uma série de inferências dedutivas. Por exemplo, ante a afirmação "se chover, a grama do jardim fica úmida", as pessoas tendem a inferir que a grama está úmida porque choveu. Entretanto, isso pode ser radicalmente falso, pois a grama pode estar úmida por diversas outras causas. Uma possível explicação é que, em uma conversa da vida cotidiana, as pessoas tendem a considerar relevante unicamente aquilo que é mencionado (se não se menciona, é porque não existe). Se o interlocutor mencionou apenas a chuva como causa da umidade da grama, então não há motivo para considerar outras causas. Como se pode ver, esse tipo de raciocínio é muito diferente do raciocínio lógico-formal, que requer a explicitação e a consideração de uma exaustiva gama de possibilidades, confirmadas ou rejeitadas mediante inferência dedutiva. Para Chapman (1993), a estrutura inferencial do pensamento cotidiano estaria influenciada pela estrutura da "argumentação" ou, de forma mais geral, pelas regras pragmáticas que regem o uso da linguagem, e essa estrutura difere de forma essencial da estrutura do raciocínio formal. Como frisou Kuhn (1989), o pensamento científico começa a aparecer quando os sujeitos são capazes de diferenciar "teorias" de "evidência", e quando passam a considerar suas próprias teorias como uma entre muitas, em um conjunto possível de teorias; idealmente, obtém-se a coerência por rejeição das teorias que não são coerentes com os dados e não com a rejeição de dados que não são coerentes com nossas teorias.

Sob esse ponto de vista, o desenvolvimento do raciocínio formal exigiria pelo menos duas condições complementares: uma, de caráter ontogenético ou evolutivo, envolvendo o desenvolvimento das capacidades necessárias para considerar um conjunto exaustivo de possibilidades hipotéticas e, portanto, para levar em conta as restrições psicológicas individuais; outra, de caráter sociocultural, que requer que as pessoas sejam instruídas nos modos do discurso formal, em que a verdade dos enunciados é estabelecida mediante a consideração de um conjunto de possibilidades hipotéticas. Ambos os tipos de raciocínio são igualmente "racionais" e, como afirma Pollitzer (1986), "algumas vezes o pensamento cotidiano pode ser ilógico por se basear em princípios que diferem dos princípios da lógica formal, mas isso não quer dizer que ele seja *irracional*". A "qualidade" de um ou outro tipo de raciocínio não depende de sua natureza intrínseca, mas de sua utilidade para certas esferas de atividade e, naturalmente, da valorização social e cultural. Nesse sentido, é tão nefasto definir o pensamento cotidiano como "deficitário", quanto louvá-lo e outorgar-lhe a categoria de "bom" ou "suficiente". Sobretudo quando isso se aplica a alguns grupos ou culturas, não é possível deixar de ver a intenção política e discriminatória.

Outros autores, como Wertsch (1991) ou Tulviste (1991), utilizam o conceito de "heterogeneidade cognitiva" para expressar a idéia de que o pensamento cotidiano e o pensamento científico constituem formas qualitativamente distintas de pensamento, sem que se possa afirmar que uma — a científica — seja superior ou mais potente que a outra. São tipos diferentes de conhecimento porque respondem a diferentes finalidades e tipos de atividade. Da mesma forma que em culturas distintas haveria diversos tipos de pensamento em função de suas diferentes formas de atividade, também em uma mesma cultura e em um mesmo indivíduo coexistiriam diferentes formas de pensamento, sem que a aquisição de uma delas implicasse o desaparecimento da outra. Em um mesmo indivíduo poderiam coexistir e se inter-relacionar formas de pensamento cotidiano e de pensamento científico, que seriam concretizadas em função das exigências do contexto. A coexistência de sistemas alternativos de pensamento também está sendo defendida por alguns autores que têm trabalhado a partir da perspectiva da mudança conceitual; Caravita e Hallden (1994) afirmam que a aquisição de uma nova teoria mais complexa não implicaria o desaparecimento de outras teorias implícitas ou pessoais, que seriam usadas em outras situações ou contextos.

Por outro lado, o pensamento cotidiano e o científico são adquiridos mediante processos também diferentes. Como sabemos, o pensamento cotidiano é fruto da experiência social direta e se adquire mediante participação nas práticas culturais habituais em determinada sociedade. No entanto, a aquisição do conhecimento científico envolve a aprendizagem de um método, uma forma de discurso que não é natural e que exige um esforço consciente e sistemático de explicitação e racionalização. A escola é a instituição fundamentalmente encarregada de colocar os indivíduos mais jovens em contato com o conhecimento científico e ajudá-los a construir o tipo de discurso que lhe é próprio. Como afirma Scribner (1977), o raciocínio formal requer o domínio de um gênero particular de discurso, fornecido pela escola. Assim, o conhecimento transmitido na escola não é conhecimento cotidiano, mas tampouco é conhecimento científico, e a aprendizagem escolar também não tem as características da descoberta ou da criação científica. Na escola ocorre uma espécie de "transposição didática" (Chevallard, 1991), mediante a qual os conteúdos científicos se transformam e se tomam decisões sobre o que, como ou quando ensinar, em função das próprias finalidades como instituição que controla a transmissão e circulação do saber.

Assim, por exemplo, a introdução da erroneamente denominada "matemática moderna" nos currículos dos anos 1960 obedeceu a várias razões: a necessidade dos matemáticos, especificamente daqueles que representavam as tendências mais logicistas, de reforçar o poder de sua disciplina com a introdução das últimas descobertas científicas; a demanda social e familiar de uma educação "moderna", que incorporasse os últimos avanços científicos ou tecnológicos; a necessidade de que o corpo docente respondesse às demandas de modernidade e cientificidade dos pais; a crença de que os problemas de aprendizagem resolvem-se com a adoção de técnicas didáticas diferentes (o ensino tradicionalmente algorítmico das operações de soma e subtração pedindo emprestado, por exemplo, é substituído por um ensino dedutivo baseado na aplicação das propriedades da operação aditiva), etc. Tudo isso fez com que conteúdos altamente formalizados, úteis para explicar com maior nível de abstração os conteúdos matemáticos, fossem adaptados e deformados para ensinar meninos e meninas do primário sem que ninguém, nem professores, nem pais, nem alunos e alunas, soubesse muito bem qual era a sua utilidade.

Nas culturas tradicionais, a aprendizagem tem uma finalidade social clara: aprende-se algo (artes da pesca ou da caça, técnicas de navegação, olaria, etc.) que seja útil para a sociedade em que se vive, e cujo domínio permitirá a integração a essa sociedade. Por outro lado, a aprendizagem é altamente personalizada; o aprendiz participa de uma atividade determinada e aprende com um mestre que o guia e que é depositário de um saber ao qual outorga importância e relevância. A institucionalização da educação e a extensão da escolaridade obrigatória, ainda que seja uma conquista inegável das sociedades civilizadas, provocaram inevitavelmente a descontextualização e a despersonalização do saber. A educação perde sua função socializadora e orienta-se para a transmissão de um conhecimento erroneamente denominado "científico" que, na maioria das vezes, não passa de um estereótipo desse conhecimento. No processo de "transposição didática", o conhecimento científico sofre uma transformação semelhante à imposta pela divulgação científica: os conhecimentos são apresentados como algo acabado, despersonalizado; socialmente neutro, resultado da aplicação de um rigoroso método dedutivo do qual não participaram a intuição, a dúvida, a controvérsia ou o erro. O conhecimento científico aparece como um conhecimento definitivo e fundamentado logicamente, completamente diferente do pensamento cotidiano.

No entanto, a excessiva dicotomização que vem se realizando entre pensamento racional ou científico e pensamento cotidiano ou não-racional se depara com graves dificuldades epistemológicas, porque no processo de construção e descoberta científica, os processos intuitivos e o pensamento concreto desempenham um papel essencial. Turkle e Papert (1992), por exemplo, formulam a necessidade de acabar com a idéia de que o pensamento formal e abstrato é a quinta-essência da atividade cognitiva, e defendem a existência de um "pluralismo epistemológico", que reivindica o papel do objeto e do concreto nos processos de pensamento, e que não define a superioridade de um deles — o formal — sobre o outro — o intuitivo —, mas os integra. Esses autores afirmam que recentemente ocorreram quatro mudanças epistemológicas que apóiam essa idéia: a) a maior presença da mulher no âmbito da ciência e do pensamento, introduzindo a relevância, nesses domínios, de um tipo de pensamento mais próximo do objeto, flexível e contextualizado; b) as contribuições dos próprios cientistas e da epistemologia da ciência, reivindicando o papel do pensamento concreto e da intuição no processo de criação científica; c) os trabalhos da psicologia sociocultural, que mostraram como as pessoas comuns usam em sua vida cotidiana um conhecimento matemático muito diferente daquele que lhes foi ensinado na escola; d) o aparecimento do computador, que provoca mudanças importantíssimas na maneira de pensar; pense-se, por exemplo, na clara implantação do sistema Macintosh ou do sistema Windows, com seu sistema de ícones; na diversidade de "estilos" existentes na programação especializada; na possibilidade de pensar combinando uma multiplicidade de códigos e de aproximar da intuição realidades muito abstratas mediante a simulação; ou na emergente inteligência artificial, cujos conteúdos têm uma sustentação cada vez mais sociobiológica que lógica.

Uma perspectiva similar é defendida por epistemólogos como Toulmin, para quem a apresentação a-histórica que os cientistas geralmente fazem das suas descobertas elimina as dúvidas, perguntas, interlocuções, intuições e dificuldades que presidiram o processo de criação. A ciência obedece tanto a um processo dialético de revisão de crenças quanto à aplicação de um rigoroso método formal — ou mais.

Assim, embora seja certo que o conhecimento científico e o cotidiano são diferentes e correspondem a epistemologias diferentes, também é verdade que nenhum dos dois ocorre em estado "puro". Não é certo, por exemplo, que todos os alunos e alunas chegam à escola com o mesmo tipo de conhecimento cotidiano; a "herança cultural" (Bourdieu, 1994) difere em função do fato de se pertencer a certos grupos ou classes sociais e hoje, por exemplo, está claro que em certas classes sociais as famílias transmitem hábitos alfabetizadores que estão ausentes nas classes populares e que permitem um acesso mais fácil ao discurso escolar.

Por outro lado, é preciso lembrar que o discurso científico nunca é socialmente neutro. Embora, sem dúvida, a descoberta da teoria da relatividade pertença ao campo do conhecimento científico, a que tipo de pensamento pertence a decisão de utilizar a bomba atômica ou a de obter recursos energéticos mediante usinas nucleares? Os valores não costumam ser incorporados à órbita do conhecimento científico, porém hoje sabemos que não é possível um desenvolvimento sustentável do planeta sem a incorporação da ética ao discurso científico.

Resumindo as reflexões anteriores:

1. O conhecimento cotidiano e o conhecimento científico são diferentes e correspondem a finalidades e epistemologias diversas. Em vez de falar da superioridade de um sobre o outro, deveríamos incorporar a idéia da coexistência de distintas formas de pensamento geradas para dar resposta a necessidades e metas diferentes.

2. A excessiva dicotomização estabelecida entre ambos os tipos de conhecimento obedece a um interesse manifesto de desvalorizar o conhecimento cotidiano frente ao científico. Entretanto, os limites entre ambos os tipos de conhecimento são mais difusos do que parece: dentro do que denominamos "conhecimento cotidiano", existe uma grande variedade de tipos de conhecimento, muitos dos quais incorporam características tradicionalmente consideradas próprias do conhecimento científico; da mesma maneira, no processo de descoberta e criação científica são adotadas formas próprias do conhecimento cotidiano, procedimentos intuitivos que só adotam a forma do raciocínio hipotético-dedutivo com fins de divulgação e apresentação do saber. Assim, o conhecimento cotidiano desempenharia um papel muito mais relevante na construção do pensamento científico do que as epistemologias racionalista e positivista pretendem. Por isso, este último, como afirma Chapman (1993), sempre contém algo do primeiro. Talvez o problema não seja "passar" do conhecimento cotidiano para o científico, mas construir níveis mais sofisticados, racionais e complexos de ambos os tipos de conhecimento e usá-los convenientemente no âmbito ou contexto em que sejam necessários. Seria preciso elevar o conhecimento cotidiano à categoria de racional e re-situar o conhecimento científico naquilo que ele tem de cotidiano e humano.

3. A escola é a instituição encarregada de transmitir conhecimento científico, mas o conhecimento escolar não é conhecimento científico. A escola realiza transposições ou adaptações que transformam o "conhecimento científico" em "saber ensinado". Essa transposição realiza-se com base tanto em critérios de controle social quanto em critérios do tipo psicopedagógico (adaptação do discurso científico, para possibilitar sua compreensão por alunos e alunas). Isso torna necessária a elaboração de uma epistemologia do conhecimento escolar, igual à epistemologia do conhecimento científico e à epistemologia do conhecimento cotidiano, já existentes.

2. A matemática escolar

A aquisição do conhecimento matemático, e mais especificamente o domínio da linguagem formal própria da matemática, constitui um bom exemplo para ilustrar as reflexões anteriores. Concretamente, os resultados de alguns trabalhos recentemente realizados nesse campo mostram que:

a) existe um pensamento matemático cotidiano cujas características são muito diferentes tanto do conhecimento científico como do escolar;

b) a aquisição do conhecimento e da linguagem matemática formal só ocorre graças à escolarização e à instrução intencional;

c) no processo de ensino e aprendizagem desse conhecimento formal, os processos intuitivos próprios do pensamento cotidiano desempenham um papel constitutivo essencial, assim como ocorre no processo de construção científica. Se forem deixados de lado, corre-se o risco de transmitir, como vem sucedendo na escola atualmente, um conhecimento esclerosado e mecânico, muito distanciado do verdadeiro conhecimento matemático.

3. A matemática da vida cotidiana *versus* a matemática escolar

A aquisição e o uso do conhecimento matemático em situações cotidianas têm sido objeto de numerosos estudos nos últimos anos. De forma resumida, os resultados desses estudos mostram o seguinte:

1. A capacidade de resolver problemas da vida cotidiana não se relaciona com a capacidade de resolver problemas de raciocínio formal (Wagner e Stenberg, 1986) ou problemas de tipo escolar ou acadêmico. Lave (1988), por exemplo, mostrou que as mulheres que podem realizar de forma efetiva cálculos que envolvem relações de proporcionalidade em situação de comparação de preços em um supermercado, não são capazes de solucionar operações isomorfas com lápis e papel.

2. Pessoas com nível de escolarização reduzido são capazes de criar seus próprios procedimentos, em geral muito distanciados dos que aprendem na escola, para resolver os problemas formulados por sua realidade cotidiana. Carraher e outros (1988) mostram, por exemplo, como uma jovem calcula o preço de 10 camisas, sendo que o preço de cada uma é 35 reais, somando mentalmente 105 reais três vezes e acrescentando 35, em vez de multiplicar por 10.

Em um trabalho recente, Saxe (1991) também mostra numerosos exemplos de cálculos realizados por vendedores ambulantes das ruas do Brasil. Para calcular a diferença entre 46 e 18, um dos vendedores diz: "Primeiro tiro 6 deste número (46) e depois tiro mais 12. Assim, retiro 18 no total. A resposta é 28". Outro subtrai de forma similar 480 de 1 320: "Primeiro tiro 320 e então tiro mais 160. Assim, fico com 840". Vejamos também a seguinte forma de somar 790 e 470: "Zero mais zero igual a zero; 9 (de 790) menos 3 igual a 6; e 3 mais 7 (de 470) é 10; e 10 mais 6 igual a 16; 4 menos 1 é 3; e 3 mais 7 é 10; 10 mais 1 mais 1 é 12".

Assim, é evidente que *certo tipo de conhecimento matemático* pode ser desenvolvido fora da escola e à margem da instrução formal, em contextos sociais e por meio de práticas culturais.

No entanto, embora as pessoas com nenhum ou baixo nível de escolaridade sejam capazes de gerar esses procedimentos próprios, existem certos conhecimentos e procedimentos que aparentemente não podem se desenvolver à margem da instrução formal. Petito e Ginsburg (1982) e mais recentemente Schliemann (1994), por exemplo, mostraram que adultos ou crianças não-escolarizados têm dificuldades para reconhecer o princípio multiplicativo de comutatividade. Por exemplo, se somaram 6 vezes o número 12 para resolver a multiplicação 6 x 12, esses sujeitos tornam a somar 12 vezes 6 quando lhes é formulada a multiplicação 12 x 6. Em outro trabalho, Schliemann e Acioly compararam sujeitos escolarizados e não-escolarizados que trabalhavam num conhecido jogo popular de loteria que envolvia conhecimentos de combinatória e probabilidade. Ainda que ambos os grupos de sujeitos fossem muito eficazes para resolver os problemas formulados no jogo e gerassem procedimentos próprios de resolução, foram encontradas diferenças entre os sujeitos escolarizados e os não-escolarizados nos seguintes aspectos:

- As regras do jogo, que envolviam relações multiplicativas, eram mais facilmente explicitadas pelos primeiros.
- Os sujeitos escolarizados tinham mais facilidade para relacionar as permutações de dígitos no jogo e problemas de permutação com outros conteúdos, inclusive com letras.
- Os sujeitos escolarizados tinham maior compreensão do sistema de combinatória.
- Os sujeitos escolarizados eram mais capazes de analisar as relações envolvidas no jogo, dando respostas que revelavam um conhecimento intuitivo do modelo probabilístico que explicava o que acontecia no jogo, enquanto os não-escolarizados, assim como ocorria nos conhecidos trabalhos sobre raciocínio silogístico de Scribner (1977), davam descrições empíricas do jogo. Em suma, a influência da escolaridade manifesta-se por meio de uma maior capacidade de compreender e explicitar as estruturas matemáticas implícitas em seus procedimentos cotidianos.

Em geral, todos esses trabalhos evidenciam que os conhecimentos não-formais adquiridos por meio da experiência cotidiana sempre são de caráter aditivo, e que o aparecimento de procedimentos multiplicativos ou mais complexos está vinculado à existência de instrução formal.

Isso confirma a hipótese, defendida por vários autores (Gelman e Gallistel, 1978; Resnick, 1987), de que desde uma idade muito precoce parecem existir estruturas ou princípios básicos de conhecimento vinculados a domínios específicos, que guiam e ao mesmo tempo restringem a aprendizagem. A existência de tais princípios poderia explicar o fato de que praticamente em todas as culturas aparecem procedimentos aditivos de forma espontânea, a partir da experiência cotidiana, enquanto nunca aparecem procedimentos multiplicativos ou outros mais sofisticados, a não ser que haja instrução formal.

Enquanto os procedimentos aditivos, mais superficiais e intuitivos, poderiam ser fruto de uma aprendizagem associativa, como sugerem alguns autores (Rodrigo e outros, 1993; Pozo, 1993; Di-Sessa, 1993), a passagem para concepções multiplicativas constitui uma verdadeira mudança conceitual. Essa mudança exigiria a superação de fortes restrições internas, que constituem verdadeiros "obstáculos epistemológicos", que só podem ser vencidos em situações ou contextos de instrução formal. Nesses contextos são geradas estratégias de descontextualização, tomada de consciência e explicitação das relações e estruturas matemáticas que não aparecem nas situações de vida cotidiana e que são absolutamente necessárias para a mudança conceitual.

Se as pessoas, quando resolvem problemas da vida cotidiana, se comportam de maneira diferente de quando resolvem problemas escolares, é porque a natureza de ambos os tipos de problemas é radicalmente distinta. O conhecimento escolar requer a formação de um novo tipo de conhecimento, a aprendizagem de um método diferente de abordar os problemas.

Os problemas matemáticos escolares têm características muito diferentes dos "dilemas" reais. Se analisarmos qualquer um dos múltiplos exemplos da vida cotidiana citados em que a matemática intervém, observaremos que, em geral, têm as seguintes características:

1. O problema é reconhecido e definido pelo próprio sujeito (por exemplo, o comprador ou compradora) e não externamente, pelo professor, por exemplo, como ocorre nos problemas escolares.
2. O problema está socialmente contextualizado.
3. Ainda que a solução do problema envolva uma atividade matemática, sua finalidade não é aprender matemática nem construir conhecimento matemático.

4. O problema tem uma finalidade prática; por exemplo, comprar o produto mais barato ou o que mais convier ao comprador em função de razões que, na maioria das vezes, são de caráter extramatemático. O comprador "aposta seu dinheiro" de forma real e não simbolicamente, como ocorre na escola.
5. Há um alto nível de envolvimento e interesse pessoal, dado pelo contexto social da atividade (comprar, por exemplo) e pela finalidade prática (economizar dinheiro), e não pelo próprio conhecimento matemático.
6. A definição do problema não é definitiva logo no início. Vai sendo construída à medida que a atividade avança. O problema e a solução geram-se simultaneamente, de forma que o sujeito vai transformando o problema para poder resolvê-lo.
7. As soluções podem ser diversas e não necessariamente exatas. Uma solução aproximada pode bastar para os objetivos do sujeito.
8. Não há um método adequado ou canônico para obter a solução, mas diversos métodos que podem ser inventados pelo sujeito.
9. O sujeito não está consciente de que realiza uma atividade matemática. O conhecimento matemático não está explícito.
10. A solução é condicionada ou influenciada pela experiência pessoal.

Vamos ver agora um exemplo típico de problema escolar, extraído de um livro de texto do primeiro curso de BUP (Bacharelado Unificado Polivalente, que correspondia, no antigo sistema educativo espanhol, à escolarização de 13 a 17 anos):

> Todos sabem que um escaravelho tem 6 patas e uma aranha tem 8 patas. Um dia, um colecionador desses animais encontra 14 bichos. Se tivesse de calçá-los precisaria de 47 pares de sapatos. Quantas aranhas e quantos escaravelhos encontrou?
>
> *Solução*
> Chamamos de: x ao número de escaravelhos
> y ao número de aranhas
> Logo: $x + y = 14$
> Um escaravelho usa 3 pares de sapatos, e uma aranha, 4 pares.
> Assim, $3x + 4y = 47$.
> Resolvemos o problema formado pelas duas equações e obtemos $x = 9$ (escaravelhos) e $y = 5$ (aranhas).

É evidente que nesse tipo de problema o que se pretende não é tanto que alunos e alunas formulem um verdadeiro problema a ser resolvido, mas que aprendam *um método de resolver problemas*; nesse caso concreto, que aprendam a resolver problemas mediante sistemas de equações. É evidente que o professor ou professora pode propor problemas um pouco mais "úteis" ou "habituais" na sala de aula do que *calçar aranhas e escaravelhos*. Mesmo assim, o valor simbólico é muito diferente nos problemas escolares e nos problemas da vida cotidiana; quando os alunos e alunas de uma classe de primário resolvem problemas de comprar e vender, estão aprendendo matemática, não estão fazendo compras no supermercado, e não entram em jogo as mesmas variáveis contextuais nem as mesmas metas ou finalidades. Ao contrário dos problemas cotidianos, os problemas escolares estão mais orientados para o aprendizado de um método de resolução ou para a aplicação de um algoritmo do que para a solução; estão bem definidos; têm apenas um método de resolução e apenas um resultado; estão descontextualizados da experiência direta porque não têm conseqüências práticas para a vida do sujeito; incentivam a descontextualização e o não-envolvimento pessoal, etc.

É evidente, portanto, que certo tipo de conhecimento matemático pode ser desenvolvido fora da escola e à margem da instrução formal, em contextos sociais e por meio de práticas culturais. Mas a aquisição do conhecimento matemático formal só é realizada em contextos de instruções nos quais as metas, os conteúdos, as atividades, a organização, etc. são muito diferentes daqueles presentes na vida cotidiana ou profissional. Na prática, como afirma Bourdieu (1977), a atividade parece ser rotineiramente eficaz e reflexivamente intencional, sem conhecer as condições de sua própria produção. As pessoas que compram no supermercado ou vendem nas ruas brasileiras não têm consciência da eficácia de sua prática matemática, e muito menos de seus princípios explicativos ou estrutura matemática ou da linguagem formal.

É evidente que o ensino de matemática seria mais significativo se incorporasse elementos da prática cotidiana; o conhecimento matemático que se ministra nas salas de aula é apresentado de forma tão estereotipada, formalizada e distante do significado e das condições de produção e aplicação desse conhecimento matemático, que dificilmente alunos e alunas podem adquirir verdadeiro *sentido matemático*. No entanto, a alternativa não reside em transferir a matemática cotidiana e intuitiva para as salas de aula, pois isso pode impedir tanto quanto um ensino formal ou, ainda mais, o acesso ao conhecimento matemático; seria melhor redefinir o verdadeiro sentido e os objetivos do conhecimento matemático a ensinar na escola, que difere tanto do conhecimento matemático cotidiano como do científico. Do meu ponto de vista, isso passa por:

1. Reconhecer que a especificidade do conhecimento matemático recai em sua natureza abstrata e no uso de uma linguagem formal muito diferente da linguagem comum. Aprender matemática significa dominar e usar *significativamente* essa linguagem. E isso nos distancia tanto das posturas formalistas, para as quais a linguagem é uma mera sintaxe, quanto das intuicionistas ou conceitualistas.
2. Reconhecer que o conhecimento matemático tem duas finalidades: o incremento do próprio conhecimento formal matemático, independente da experiência, e sua aplicação ao mundo científico e social. O reconhecimento dos usos e aplicações sociais da matemática não significa *brincar de vender e comprar na sala de aula*, mas buscar formas de vincular o conhecimento matemático aos seus usos científicos e sociais é essencial para dotar de sentido a atividade matemática na sala de aula.

Em ambos os processos, é preciso haver articulação entre o conhecimento cotidiano, implícito e intuitivo, e o conhecimento científico, explícito e formalizado.

4. A matemática escolar como linguagem: coexistência entre linguagem natural e formal

Um dos problemas mais importantes que o ensino de matemática tem de enfrentar reside na enorme dificuldade que, para alunos e alunas, representa o domínio da linguagem matemática, especificamente da algébrica. Numerosos trabalhos mostraram o tipo e a natureza dos erros que alunos e alunas cometem ao manipular os símbolos matemáticos. A explicação mais generalizada é que isso se deve ao fato de que tradicionalmente o ensino da matemática teve um caráter mais sintático que semântico, mais baseado na aplicação de regras que na compreensão do significado.

Como alternativa a essas práticas formalistas, nos anos 1960 foram publicados diversos trabalhos baseados na teoria de Piaget (Van Hiele, Brousseau, Vergnaud, etc.), que atribuíram a causa dos numerosos erros cometidos pelos estudantes à falta de compreensão dos conceitos matemáticos. Sob esse ponto de vista, uma boa compreensão do significado desses conceitos — estruturas aditivas e multiplicativas, proporcionalidade, conceito de função, etc. — evitaria muitos desses erros. Essa perspectiva, de caráter claramente conceitualista, obviamente atribui à linguagem um papel secundário, totalmente dependente da compreensão conceitual.

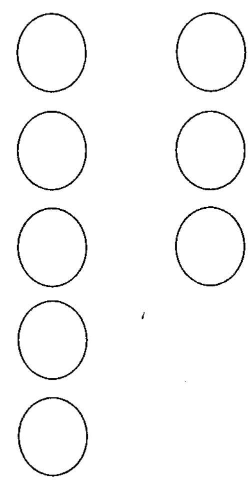
Entretanto, em trabalhos mais recentes (Drouhard, 1992; Filloy, 1991, 1993; Laborde, 1990; Rojano, 1994; etc.) tende-se a pensar que a causa de tais erros e dificuldades encontra-se, mais do que na falta de compreensão conceitual, em problemas derivados da aprendizagem da formulação na matemática, isto é, na dificuldade real que pressupõe a aprendizagem de uma linguagem específica de características muito diferentes da linguagem comum, e na atitude peculiar — denominada por alguns autores (Drouhard, 1992) de *autômatos formais* — que um ensino excessivamente formalista gera em alunos e alunas.

O valor relativo das cifras, as regras de escrita de número com mais de um algarismo, os algoritmos das operações, a medida de diferentes magnitudes, as operações com parênteses, a simplificação de frações, a busca do menor múltiplo comum, a resolução de equações, a resolução de integrais, etc., além de um conhecimento conceitual exigem o domínio das regras sintáticas e das convenções de notação próprias do simbolismo matemático. Na verdade, a natureza do pensamento matemático, seu caráter abstrato e não-dependente da experiência, devem-se em grande parte ao fato de ter elaborado uma linguagem formal que elimina a ambigüidade e o particularismo da linguagem comum. Vamos ver, por exemplo, estas duas expressões:

Linguagem algébrica:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Linguagem comum:

"O quadrado da soma de dois números é igual à soma dos seus quadrados adicionada ao dobro do seu produto".

É óbvio que, para uma pessoa que não entenda a linguagem algébrica, a segunda expressão é muito mais significativa. Para entendê-la, só tem de ter alguma idéia do conceito de quadrado de um número e de produto. Mas também é óbvio que, do ponto de vista científico, a primeira é muito mais produtiva, pois tem tal grau de generalidade que permite abranger todos os casos particulares e, o que é mais importante, prever novos casos. A história da matemática está repleta de exemplos que mostram como a invenção de novos códigos lingüísticos e símbolos mais abstratos foi determinante para o desenvolvimento matemático posterior. Basta recordar como a invenção de um símbolo para representar um lugar que fica vazio em uma tabela de contar permitiu a descoberta do princípio de posição na numeração, do qual depende toda a construção posterior da aritmética. Com efeito, durante milhares de anos as numerações de caráter aditivo usadas desde a Antiguidade impediram o desenvolvimento da aritmética, pois com tais sistemas os cálculos e operações são tremendamente longos e entediantes. Imaginemos que queiramos passar para o papel a seguinte disposição das fichas de um ábaco ou de uma tabela de contar, instrumentos usados para calcular antes da descoberta do princípio de posição:



Esse desenho pode representar quantidades muito diferentes, como 53, 530, 5300, 503, etc. Assim, é preciso inventar um símbolo que represente as colunas vazias, e esse símbolo será a palavra *sunya*, que na língua indiana significa "vazio". Como ressalta Danzing (1974), a descoberta do zero foi fruto da tentativa de registrar de forma permanente e não ambígua uma operação realizada em uma tabela de contar.

Poderíamos dizer o mesmo da grande contribuição de Francis Vieta, com a introdução do uso de letras do alfabeto para distinguir os valores dos dados desconhecidos (incógnitas) em uma equação, o que permitiu o início da álgebra simbólica com tudo o que ela representou para o conhecimento matemático. Dos gregos até a Idade Média foram utilizados termos da linguagem comum, como *arithmos* ou *res*, para designar a incógnita; esses termos faziam pensar obviamente no significado intuitivo: "o que não está, o que não se conhece", etc. O uso da notação com letras possibilita a independência com relação ao objeto que se representa; o símbolo adquire então um significado que vai além do objeto simbolizado.

Enquanto a linguagem comum é redundante e ambígua, pois sua função fundamental é a comunicação, a linguagem matemática tem as seguintes características:

- é abstrata e geral; tenta abstrair o essencial das relações matemáticas, eliminando qualquer referência ao contexto ou às situações particulares;
- é um sistema de sinais autocontido;
- é rigorosa, precisa e não redundante;
- exclui intenções, emoções e afetos;
- é teórica, impessoal e atemporal;
- sua finalidade fundamental não é facilitar a comunicação, mas a inferência.

Assim, aprender matemática é aprender uma forma de discurso que, ainda que tenha estreita relação com a atividade conceitual, mantém sua própria especificidade como discurso lingüístico. Não basta conhecer o sistema numérico decimal para operar utilizando corretamente o princípio de posição; um mesmo conceito ou operação, como a multiplicação, é representado de forma diferente na linguagem aritmética e na algébrica, e alunos e alunas devem conhecer as regras associadas a cada tipo de notação. Tudo isso implica, por exemplo, que nas linguagens formais a construção algorítmica do vocabulário seja muito mais forte que nas linguagens naturais. Enquanto a falta de um acento ou a conjugação de um verbo irregular como regular não modifica fundamentalmente o sentido de uma frase, na linguagem algébrica qualquer erro desse tipo pode alterar totalmente o significado de uma expressão.

Sob essa perspectiva, entende-se que muitos dos erros cometidos pelos estudantes devem-se à supergeneralização ou extrapolação de regras ou propriedades da linguagem natural para a aritmética e a algébrica, ou da aritmética para a algébrica. Um exemplo bastante conhecido, citado por Pimm (1990), é o dos alunos que, quando se pede que traduzam para álgebra o enunciado "Há 6 vezes tantos estudantes quanto professores", escrevem a equação "6S=P". Outro exemplo (Norman, 1987) da forma como a sintaxe da linguagem natural pode afetar a compreensão da estrutura algébrica é o seguinte:

> Em uma viagem, João percorreu um total de 500 milhas (1 200 km) em uma hora. Percorreu uma parte da viagem a uma velocidade de 35 milhas (77 km) por hora. A que velocidade percorreu a outra parte?

Ao resolver esse problema, um grande número de alunos respondeu que na segunda parte do trajeto Juan dirigiu a uma velocidade de 15 milhas (33 km) por hora. A interpretação de Norman baseia-se no fato de que a sintaxe do problema formulado em linguagem natural impõe uma estrutura aditiva que se "translada" para a linguagem algébrica.

Outro exemplo pode ser útil para que se veja como uma regra da linguagem aritmética extrapola para a linguagem algébrica: em álgebra, a operação de multiplicar exprime-se mediante a justaposição de símbolos: a x b = ab; visto que na aritmética a justaposição de símbolos tem um significado diferente (4 1/2 não significa 4 x 1/2, nem 34 significa 3 x 4), os alunos que se iniciam na álgebra tendem a interpretar que, se a = 5 e b = 6, então ab = 56, em vez de 30. Ou, por exemplo, aplicam a regra de eliminação de sinal "+" em aritmética (4 + 0,5 = 4,5) em álgebra: 3a + 5b = 8ab.

Na verdade, o problema fundamental reside em que o aluno ou aluna que aprende matemática deve aprender a substituir os códigos próprios da linguagem natural ou comum pelos códigos próprios da linguagem matemática. E isso constitui um "obstáculo cognitivo" porque, como afirma Bruner (1986), as pessoas em geral e as crianças em particular têm um pensamento de tipo narrativo, orientado para a compreensão de fenômenos concretos, pessoais e intencionais, enquanto o pensamento matemático tem caráter paradigmático, que suprime intenções e motivações, e baseia-se em representações abstratas e muito gerais.

O mais importante, porém, é a análise do que alunos e alunas fazem. E essa análise mostra que, quando um procedimento mais complexo — o algébrico, por exemplo — está em vias de apropriação, o recurso a um procedimento mais concreto, como a linguagem aritmética ou a natural, permite perceber elementos do sentido que desaparecem com o uso do código algébrico. Elementos de tipo geográfico, por exemplo (a linha de baixo); temporal (o primeiro número para denominar o número de partida); pessoal ("tracei um ponto" em vez de "traça-se um ponto"); ou redundante ("desenhei um segmento; depois marquei um ponto no meio desse segmento"), etc.

Como já se disse, a linguagem formal caracteriza-se pela supressão do conteúdo semântico e por expressar de maneira mais geral e abstrata possível o essencial das relações e transformações matemáticas. Esse é um longo processo em que a interação e a dialética entre os aspectos matemáticos e extramatemáticos das diferentes situações desempenham um papel essencial. E isso é assim porque, tanto ontogenética como filogeneticamente, existe uma grande resistência do pensamento humano a abandonar o conteúdo do objeto, expresso pela linguagem natural e pelas representações analógicas, e a substituí-lo pelo símbolo formal.

A história da matemática é rica em exemplos, como o da invenção do zero ou o aparecimento da álgebra simbólica, que mostram como a passagem das representações intuitivas para as analíticas, das numerações aditivas às multiplicativas, etc. na construção do conhecimento matemático constituiu um verdadeiro "obstáculo epistemológico" em que o pensamento humano teve de vencer sua forte tendência à intuição e à vinculação ao "objeto", ao significado.

Mas também nos mostra que, nesse longo trajeto histórico que constitui a busca de uma linguagem formal, ocorreu um processo de interação constante, e não de filiação direta, entre a linguagem

natural e a simbólica. Uma revisão histórica dos livros e tratados matemáticos nos mostraria que a presença da linguagem natural para formular certas relações matemáticas foi muito forte até o final do século XIX. Embora gregos e árabes já tivessem recorrido às letras na geometria para designar pontos, linhas, etc., no século XVII ainda subsistiam explicações de resolução de equações em linguagem natural.

Por outro lado, existem trabalhos no campo da língua escrita (Ferreiro e Teberosky, 1979), da notação numérica (Tolchinsky e Karmiloff, 1993) e da simbolização de algoritmos de operações aritméticas (Gómez-Granell, 1988, 1989, 1991) que demonstram que não existe uma relação de subordinação entre desenho e escrita ou desenho e notação numérica, isto é, não é verdade que as crianças primeiro desenham ou escrevem e depois, por necessidade de abstração e convencionalização, passem a usar letras, números ou símbolos matemáticos. Ao contrário, parece que, graças à interação com o meio social e cultural, as crianças conhecem e usam de forma diferenciada letras, cifras e desenho. Entretanto, no início esse conhecimento é de caráter mais formal que funcional, ou seja, as crianças diferenciam as características formais de cada sistema e sabem muito bem o que é uma palavra escrita, uma cifra, um símbolo aritmético ou um desenho, mas isso não significa que tenham um conhecimento mais profundo da semântica interna de cada um deles e de seus usos. No caso concreto da notação numérica, o uso do desenho ou da linguagem comum constitui um recurso usado em um nível do desenvolvimento em que é preciso explicitar a semântica do sistema para possibilitar sua apropriação interna. Só então seria possível prescindir do significado referencial do símbolo e ficar apenas com o formal.

Assim, por um lado, a linguagem natural desempenha uma função primordial na criação de novos símbolos matemáticos, garantindo o vínculo com o objeto de referência e impedindo a perda de significado provocado por todo processo de abstração; por outro, é essencial para devolver aos símbolos matemáticos um significado referencial, possibilitando assim uma das funções essenciais da matemática: penetrar nas ciências do mundo externo — física, química, biologia, economia, sociologia, psicologia — e na vida cotidiana. Como afirma Jackobson: "Embora seja certo que em matemática o sinal 2 seja uma entidade dentro do código matemático, que pode ser interpretado através de sua relação com outros sinais no código, a aplicabilidade de todos esses sinais resulta da relação entre o sinal '2' e a palavra 'dois'".

A linguagem simbólica não substitui a linguagem natural; ambas coexistem e a primeira adquire sentido em função de sua relação com a segunda.

O ensino formalista da matemática a identificou com uma linguagem, e sobretudo com uma forma particular de entender a linguagem como um conjunto de regras e normas desprovidas de qualquer significado. De forma coerente com o que lhes é ensinado, alunos e alunas comportam-se como perfeitos autômatos formais, como podemos ver no seguinte exemplo citado por Baruck (1973):

Um aluno tinha resolvido uma equação da seguinte forma:

$$2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6$$

Quando se perguntou ao aluno como era possível que 2 fosse igual a 6, sua resposta foi eloqüente: "E daí?". É óbvio que ele sabia perfeitamente que 2 não é igual a 6, mas para esse aluno, assim como para a maioria, o importante não é a verdade do resultado obtido, mas a correção do procedimento usado. O aluno aplica um procedimento de simplificação, válido em outros contextos mas não aqui, segundo o qual o 4 do numerador e o 4 do denominador desaparecem, chegando assim à conclusão de que 6/1 é, evidentemente, igual a 6.

Todos os que algum dia ensinaram matemática em uma sala de aula sabem que esse não é um exemplo insólito, mas muito habitual. E também sabem que, se o problema tratar de conteúdos — cotidianos ou científicos — próximos dos alunos, a situação não se modifica muito. Tanto no caso da compra no supermercado, da relação entre tempo e quilômetros percorridos, ou de uma coisa aparentemente tão absurda como sapatos de aranhas e escaravelhos, os problemas continuam sendo um simples instrumento formal para que os alunos e as alunas se exercitem na aplicação de certos procedimentos, à margem de qualquer significado.

Os procedimentos não-formais ou intuitivos, o recurso a representações analógicas ou à linguagem natural, etc. não constituem conhecimentos prévios que devem ser superados, trocados ou modificados. Tanto no campo do conhecimento matemático como no das ciências experimentais, foram realizados numerosos trabalhos que mostram que os alunos não resolvem de forma consistente problemas que, embora apresentem a mesma estrutura matemática (função linear, proporcionalidade, etc.), têm uma estrutura semântica ou sintática diferente. Alunos que usam procedimentos multiplicativos para resolver um problema de proporcionalidade com uma relação funcional direta, recorrem a procedimentos aditivos quando a relação funcional é inversa (Gómez-Granell, 1989, 1994). O mesmo acontece com o uso da linguagem matemática; os alunos recorrem ao uso da linguagem natural ou ao desenho quando a estrutura semântica do problema se complica (Gómez-Granell, 1989, 1991, 1994). Isso nos permite explicitar mais facilmente a semântica da operação e desse modo constituir uma representação mental dela.

Os resultados desses e de outros trabalhos (Wertsch, 1991; Tulviste, 1991; Caravita e Hallden, 1994) induzem a pensar que o aparecimento de um conhecimento mais complexo não implica o desaparecimento de procedimentos mais intuitivos, que são ativados em função de necessidades contextuais.

Muitas vezes observamos nas aulas de matemática que alunos incapazes de resolver um problema mediante o uso de algoritmos convencionais resolviam-no facilmente e eram muito mais capazes de explicitar as relações e transformações presentes no problema se lhes pedíssemos que usassem suas próprias estratégias (esquemas, desenhos, risquinhos, etc.) ou se lhes oferecêssemos algum tipo de tradução para a linguagem natural. Vejamos um par de exemplos.

Em álgebra, a regra da mudança de sinal estabelece que, se retirarmos um parêntese precedido de um sinal "–", o sinal de dentro do parêntese deve mudar:

$$[a - (b + c)] = a - b - c$$

A justificação da regra fica clara por meio da equivalência semântica entre estes dois problemas:

João tem 30 balas. Dá 20 para seus amigos, 8 para Luís e 12 para Ignácio.
João tem 30 balas. Dá 8 para Luís e 12 para Ignácio.

Enquanto o primeiro problema pode ser representado pela expressão aritmética 30 – (8 + 12), a segunda corresponde à expressão 30 – 8 – 12. Resnick e outros (1987) mostraram que, embora muitos alunos sejam capazes de inventar um problema para a expressão 30 – 8 – 12, muito poucos conseguem inventar um problema para 30 – (8 + 12). Entretanto, esses mesmos alunos podem aplicar a regra corretamente quando se pede que coloquem parênteses na expressão 30 – 8 – 12. É evidente que, no processo de ensino, a regra não se relacionou ao conhecimento que os alunos têm sobre as transformações aditivas.

O Grupo Azarquiel (1992) também apresenta um exemplo significativo. Diante da pergunta sobre o valor de x na igualdade $3x = 12$, diversos alunos responderam que era 9. Justificaram sua resposta da seguinte maneira: "Como o 3 que acompanha o x não tem nenhum sinal na frente, isso quer dizer que o sinal correspondente é '+' (sinal que indica que o três é um número positivo, mas que também é o sinal da soma); logo, é '+ 3', e como está somando em um lado da igualdade passa a subtrair do outro; assim, o $3x = 12$ transforma-se em $x = 12 - 3$, que é igual a 9". A explicação para esse erro é clara: a equação $3x = 12$ não foi vinculada a nenhuma situação concreta conhecida pelos alunos, e isso fez com que eles aplicassem uma regra conhecida, formalmente correta e adequada para outra situação ou problema, mas carente de sentido na situação presente. No entanto, nada mais fácil do que dar sentido referencial a essa equação com um problema simples que todos os alunos conhecem e podem vincular a essa equação: "Calcule o número pelo qual se deve multiplicar 3 para dar 12".

O uso da linguagem natural para devolver significado aos símbolos matemáticos é essencial para uma aprendizagem significativa da linguagem matemática e, conseqüentemente, para dotar a matemática escolar de sentido.

Referências bibliográficas

BARUCK, S. 1973. *Ethic et maths*. Paris, Seuil.

BECKER, J. 1989. Preescholers use of number words to denote one-to-one correspondence. *Child Development*, 60. p. 1147-57.

BOURDIEU, P. 1977. *Outline of a theory of practice*. Cambridge, MA, Cambridge University Press.

_______. 1994. *Raisons practiques*. Paris, Seuil.

BRUNER, J. 1986. *Actual minds, possible words*. Cambridge, MA, University Press.

CARAVITA, S. & HALLDEN, O. 1994. Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction, 4* (1). p. 89-111.

CARRAHER, D.; CARRAHER, T.; SCHILIEMANN, A. 1988. *Na vida dez, na escola, zero*. São Paulo, Cortez.

CHAPMAN, M. 1993. Everyday reasoning and the revision of belief. In: PUCKETT, J. M. & REESE, H. W., orgs. *Mechanisms on everyday cognition*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

CHEVALLARD, Y. 1991. *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage Éditions.

DANZING, T. 1974. *Le nombre, language de la science*. Paris, Albert Blanchard.

DISESSA, A. 1993. Towards a epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10 (2-3). p. 105-225.

DROUHARD, J. P. 1992. *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Paris, Université Dennis Diderot. Tese de doutorado inédita.

FERREIRO, E. & TEBEROSKY, A. 1979. *Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño*. México, Siglo XXI.

FILLOY, E. 1991. Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. In: FURRINGHETTI, F., org. *Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. p. II. 1-33.

_______. 1993. Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*. p. 160-6. v. II.

GELMAN, R. & GALLISTEL, C. R. 1978. *The child understanding of number*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

GINSBURG, M. L. 1987. Introduction. In: _______. *Readings in nonmonotonnic reasonning*. Los Altos, CA, Morgan Kaufmann. p. 1-23.

GÓMEZ-GRANELL, C. 1988. *Representación y simbolización en el marco de problemas multiplicativos*. Universidade de Barcelona. Tese de doutoramento inédita.

_______. 1989. La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 34. p. 5-15.

_______. 1991a. Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12. p. 11-26.

_______. 1991b. The acquisition of mathematical language. The relationship between text and context. In: DEL RÍO, P.; ÁLVAREZ, A.; WERTSCH, J., orgs. *Explorations in sociocultural studies*. p. 147-54. v. 4.

_______ & COLL, C. 1994. De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo. *Cuadernos de Pedagogía*, 221. p. 20-3.

GRUPO AZARQUIEL. 1992. El simbolismo algebraico o ¿por qué los profesores nos empeñamos en complicar tanto la vida de nuestros alumnos? *Tarbiya. Revista del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Madrid*, 1-2. p. 81-90.

HAVELOCK, E. 1983. *Cultura orale e civitá della scrittura*. Roma, Biblioteca Universale Laterza.

IFRAH, G. 1981. *Histoire universelle des chiffres*. Paris, Seghers.

KARMILOFF-SMITH, A. 1992. *Beyond Modularity. A developmental perspective on cognitive science*. Cambridge, MA, MIT Press.

KAUFMAN, E. L.; LORD, M. W.; REESE, T. W.; WOLMANN, I. 1949. The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62. p. 498-625.

KLEIN, A. & STARKEY, P. 1987. The origins and development of numerical cognition: a comparative analysis. In: SLOBODA, J. A. & ROGERS, D., orgs. *Cognitive process in mathematics*. Oxford, Clarendon Press.

KUHN, D. 1989. Children and adults as intuitive scientist. *Psychological Review*, 96. p. 674-89.

LABORATORY OF COMPARATIVE HUMAN COGNITION. 1983. Culture and cognition developmet. In: KESSEN, W., org. *History, theory and methods*. v. I de MUSSEN, P. H., org. *Handbook of child psychology*. New York, Wiley.

LABORDE, C. 1982. *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Université de Grenoble. Tese de doutoramento inédita.

_______. 1990. Language and mathematics. In: NESHER, P. & KILPATRICK, J., orgs. *Mathematics and cognition*. Cambridge, Cambridge University Press, p. 53-69.

LAVE, J. 1988. *La cognición en la práctica*. Barcelona, Paidós.

NISBERT, R. & ROSS, L. 1980. *Human inference: strategies and shortcomings of social judgement*. New Jersey, Prentice-Hall.

NORMAN, F. 1987. A psycholinguistic perspective of algebraic language. In: BERGERON, J.; HERSCOVICS, N.; KIERAN, C., orgs. *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. p. 324-30. v. I.

PETITO, A. & GINSBURG, H. 1982. Mental arithmetic in Africa and America: Strategies, principles and explanations. *International Journal of Psychology*, 17. p. 81-102.

PIMM, D. 1990. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, Morata.

POLLITZER, G. 1986. Laws of language use and formal logic. *Journal of Psycholinguistic Research*, 15. p. 47-92.

POZO, J. I. 1993. Psicología y didáctica de las ciencias de la naturaleza. ¿Concepciones alternativas? *Infancia y Aprendizaje*, 62-63. p. 187-204.

REITER, R. 1987. Nonmonotonic reasoning. *Anual Reviews of Computer Science*, 2. p. 147-86.

RESNICK, L.; CAUZINILLE-MARMÈCHE, E.; MATHIU, J. 1987. Understanding algebra. In: SLOBODA, J. A. & ROGERS, D., orgs. *Cognitive processes in mathematics*. Oxford, Clarendon Press.

RODRIGO, M. J.; RODRÍGUEZ, A.; MARRERO, J. 1993. *Las teorías implícitas. Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid, Visor.

ROJANO, T. 1994. La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 12* (1). p. 45-6.

SAXE, G. B. 1991. *Culture and cognitive development. Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

SCHLIEMANN, A. 1994. School children's versus street sellers' use of the conmutative law for solving multiplication problems. *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. p. 209-16. v. IV.

_______ & ACIOLY, N. M. 1989. Mathematical knowledge developed at work: the contribution of practice versus the contribution of schooling. *Cognition and Instruction, 6* (3). p. 185-221.

SCRIBNER, S. 1977. Recall of classical syllogisms: a cross-cultural investigation of error in logical problems. In: FALMAGNE, R. J., org. *Reasoning: representation and process in children and adults*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum. p. 153-73.

_______. 1984. Studing working intelligence. In: LAVE, J. & ROGOFF, B., orgs. *Everyday cognition: its development in social context*. Cambridge, Harvard University Press.

STENBERG, R. J.; WAGNER, R.; OGAKKI, L. 1993. Practical intelligence: the nature and role of tacit knowledge in work and in school. In: PUCKETT, J. M. & REESE, H. W., orgs. *Mechanism of everyday cognition*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

TOLCHINSKY, L. & KARMILOFF, A. 1993. Las restricciones del conocimiento notacional. *Infancia y Aprendizaje*, 62-63. p. 19-51.

TULVISTE, P. 1991. *The cultural-historical development of verbal thinking*. New York, Nova Science Publishers, Inc.

TURKLE, S. & PAPERT, S. 1992. Epistemological pluralism and the revaluation of the concrete. *Journal of Mathematical Behavior*, 11. p. 3-33.

WAGNER, R. K. & STENBERG, R. J. 1986. Tacit knowledge and intelligence in the everyday world. In: ______ & ______, orgs. *Practical intelligence: nature and origins of competence in the everyday world*. New York, Cambridge University Press.

WERTSCH, W. 1991. *Voices of the mind. A sociocultural approach to the mediated action*. Cambridge, Harvard University Press.

WYNN, K. 1992. Addition and substraction by human infants. *Nature*, 358. p. 759-60.