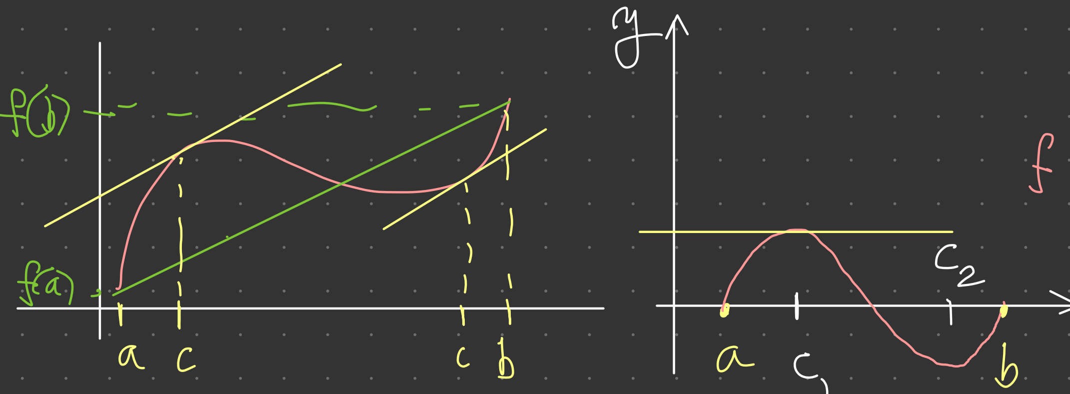
Teo Valor médio $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Então $\exists$ $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Antes vemos:

Teorema (Rolle): $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b).

Se $f(a) = f(b) = 0$, então $\exists$ $c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = 0$.

dem. Já vimos que se f possui máximo ou mínimo local em $x=c \rightsquigarrow f'(c)=0$.

Se $f \equiv$ constante $\rightsquigarrow f(x) \equiv 0$ em $(a,b) \rightsquigarrow$ $f'(x)=0$ em (a,b).

Spg. $f(x)>0$ em algum pt. de $(a,b) \rightsquigarrow$

$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f > 0$ com $c \in (a,b)$ pois $f(a)=f(b)=0$.

Logo $f(c)$ é local e $\therefore f'(c)=0$. $\blacksquare$

dem (TVM) Vamos aplicar o Rolle. Considere

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a), \quad x \in \mathbb{R}$$

é a equação da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Defina agora $F(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a,b]$.

$$F(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - g(b) = 0$$

F é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b)

Teo. Rolle $\rightsquigarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ tq. $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(c) = 0 \rightsquigarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\blacksquare$

Corolário: $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ contínua com $f'(x) \equiv 0$ em (a,b).

Então $f(x) =$ constante em (a,b).

__dem__. Sejam $x_1 < x_2 \in (a,b)$. $f|_{[x_1,x_2]}$ é contínua e derivável. Pelo TVM, $\exists\ c \in (x_1,x_2)$ tal que

$$0 = f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \rightsquigarrow f(x_2) = f(x_1).$$

$\blacksquare$

Pontos críticos: Seja $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ derivável.

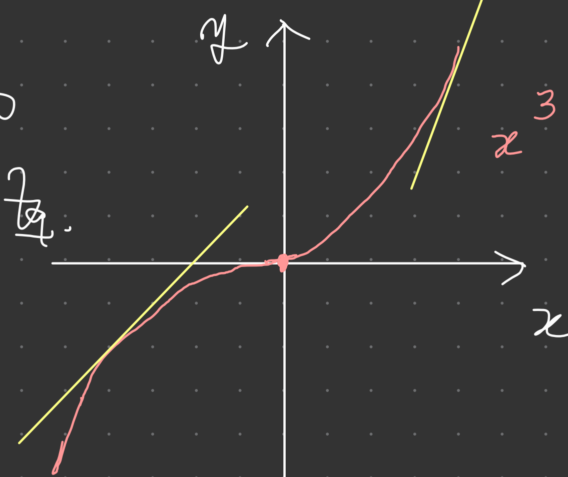
Dizemos $c \in (a,b)$ é pt. crítico de f se $f'(c)=0$.

OBS: Se c é pt. de máximo ou mínimo local então $f'(c)=0$ (c é pt. crítico).

Def: Um pt. crítico c é ponto de inflexão horizontal de f se $\exists\ N_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ tal que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em $N_\delta(c)$.

Exemplo. $f(x) = x^3$ é estritamente crescente e $f'(0)=0$, pt. inflexão

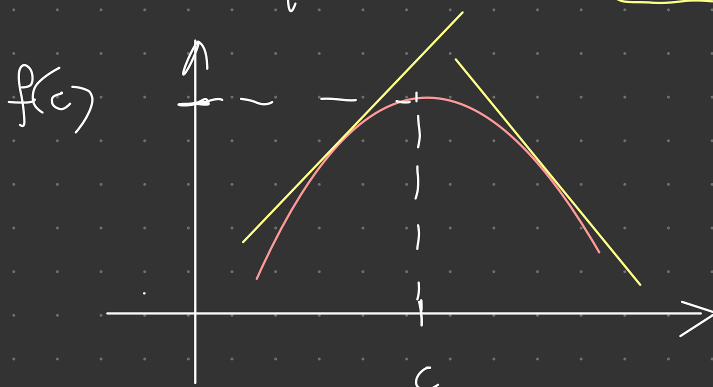
Teo. $f:(a,b)\longmapsto\mathbb{R}$ derivável com $f'(c)=0$ para algum $c\in(a,b)$. Se existe $\delta>0$ tq.



(i) $f'(x)\overset{>}{\geq}0$ em $(c-\delta,c)$ e

$f'(x)\overset{<}{\leq}0$ em $(c,c+\delta)$ então

c é pt. de máximo local estrito



(ii) $f'(x)\overset{<}{\leq}0$ em $(c-\delta,c)$ e

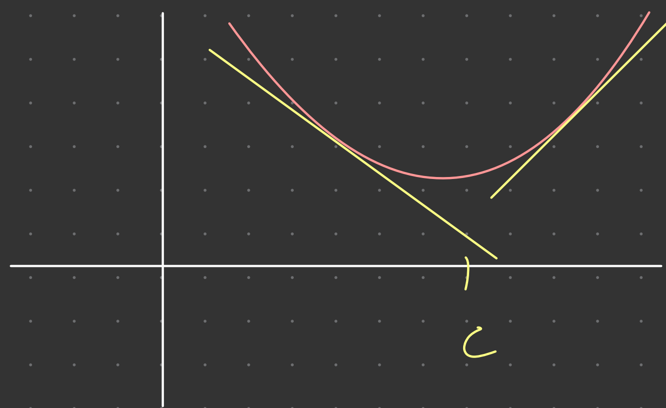
$f'(x)\overset{>}{\geq}0$ em $(c,c+\delta)$, então

c é pt. de mínimo local estrito.

Corolário: Suponha f'' existe em (a,b) com $f'(c)=0$.

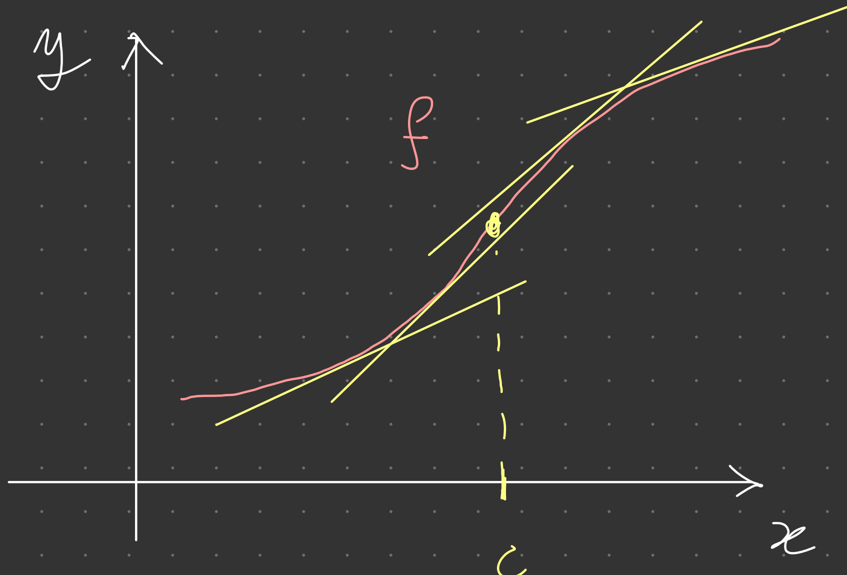
(i) $f''(x) \leq 0$ em $N_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ para algum $\delta > 0$ então c é pt. de máximo local.

(ii) $f'' \geq 0$ em $N_\delta(c)$ então c é pt. de mínimo local.

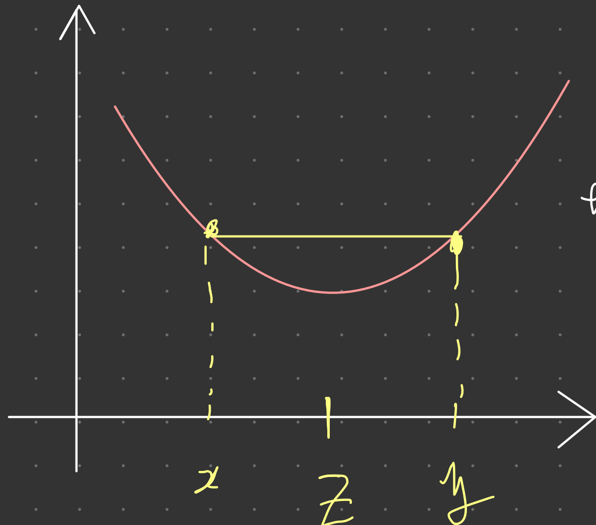


mínimo local

Def. $c \in (a,b)$ é pt. de inflexão (vertical) se $f''(c) = 0$ e f'' muda de sinal em $x = c$.



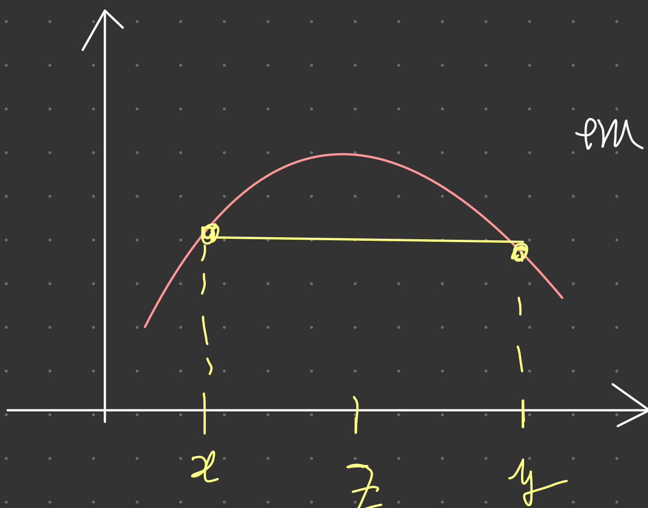
Obs: Nesse caso há mudança de concavidade. Passa de convexa para côncava qdo x passa de menor ou igual a c para maior ou igual a c.



Def. f é uma função convexa em $[a,b]$ se $\forall\, x,y \in [a,b]$ e todo $\alpha \in [0,1]$

$$f(z) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Com $z = \alpha x + (1-\alpha) y$.



Def. f é uma função côncava em $[a,b]$ se $\forall\, x,y \in [a,b]$ e todo $\alpha \in [0,1]$

$$f(z) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Com $z = \alpha x + (1-\alpha) y$.

Teo. f contínua em $[a,b]$. Se f' é crescente em (a,b) então f é convexa em $[a,b]$. Em particular, se $f'' \geq 0$ em (a,b) então f é convexa em $[a,b]$.

dem. Sejam $x < y$ em (a,b) e $z = \alpha x + (1-\alpha) y \in [x,y]$ sempre que $\alpha \in [0,1]$. Pelo TVM $\exists\, c \in (x,z)$ e $d \in (z,y)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ e

$$f'(d) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

com $f'(c) \leq f'(d)$.

$$(1-\alpha)(z-y) = z - y - \alpha(z-y)$$

$$= z - y(1-\alpha) - \alpha z = \alpha(x-z)$$

$$(1-\alpha)\big(f(y) - f(z)\big) = f'(d)(y-z)(1-\alpha)$$

$$= f'(d)\,\alpha(z-x) \geq f'(c)\,\alpha(z-x)$$

$$\geq \alpha\big(f(z) - f(x)\big)$$

$$\therefore\ (1-\alpha)f(y) + \alpha f(x) \geq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z) = f(z)$$

$\therefore$ f é convexa.