4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Prova 1 – 8/10/2021

Nome:____	**Nº USP**__________

AVISOS:

• Escolha apenas dois exercícios, resolva e entregue no site da disciplina no “local para entrega das provas” até 13 hs do dia 8 de outubro.

•O prazo para entrega dos outros dois exercícios será 12 de outubro até as 23:59 hs, no novo link que será criado para este fim.

• É permitido o uso de calculadoras, consulta a livros e slides das aulas, mas NÃO aos colegas.

• Escreva de maneira legível e entregue uma cópia também legível.

• Justifique TODAS as suas respostas, bem como fórmulas utilizadas fora deste formulário.

• Para facilitar a correção, sempre que possível encontre a solução em função das variáveis literais e só no final substitua pelos valores numéricos.

Formulário

$$k = 8{,}99 \times 10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$

$$\int \frac{\mathrm{x\,dx}}{\mathrm{x+d}} = x - d\ln(x+d)$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{kq_iq_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \oint_S \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$U = qV \qquad \Delta U = q\Delta V \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \qquad V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$E = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Formulário

capacitores em série: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$ em paralelo: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

constante dielétrica: $\kappa = \frac{C}{C_0}$ $\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$

$J = \frac{I}{A}$ $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ $R = \frac{\rho l}{A}$

$J = \sigma E$ $E = \rho J$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$V = RI$ $P = \varepsilon I$ $P = RI^2$

Resistor em série: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$ em paralelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

Constante dielétrica: $\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Lei de Gauss para dielétrico: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{livre}$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Aceleração da gravidade, g=9.8 m/s^2

1) Um disco de raio R está carregado com densidade superficial de carga $\sigma = \sigma_0 R/r$. Em função de σ_0, R e ε, responda:

Considere que o potencial de um anel de raio r uniformemente carregado a distância x do centro do anel ao longo do eixo que passa pelo seu centro é dada por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(1,0) a) Determinar a carga total do disco, Q.

(1.0) b) Determine o potencial do disco em função da distância ao centro do disco, ao longo do eixo perpendicular (eixo x) passando pelo seu centro.

(0.5) c) Qual é o trabalho necessário para trazer uma partícula de carga q do infinito a uma distância de x=1m ao longo do eixo x definido no item anterior.

(a) $dq = 2\pi r dr \sigma = 2\pi r dr \dfrac{\sigma_0 R}{r} = 2\pi\sigma_0 R dr$

$$Q = \int_0^R dq = 2\pi\sigma_0 R \int_0^R dr = 2\pi\sigma_0 R^2$$

(b) O potencial de um aro de raio r e largura dr ao longo do seu eixo passando pelo centro a uma distância x é: $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\pi\sigma_0 R dr}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sigma_0 R dr}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$V = \int_0^R dV = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{dr}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(r+\sqrt{r^2+x^2}\right)\Big|_0^R = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\ln\left(R+\sqrt{R^2+x^2}\right)-\ln x\right]$$

$$V = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2+x^2}}{x}\right)$$

$$\Delta U = q\Delta V$$

$$\Delta U_{\infty\to 1} = q\left[V(1) - V(\infty)\right]$$

$$V(\infty) = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R+x\sqrt{\frac{R^2}{x^2}+1}}{x}\right) = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln(1) = 0$$

$$V(1) = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2+1^2}}{1}\right) = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)$$

$$\Delta U_{\infty\to 1} = q\left[V(1) - V(\infty)\right] = \frac{q\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(R + \sqrt{R^2+1}\right)$$

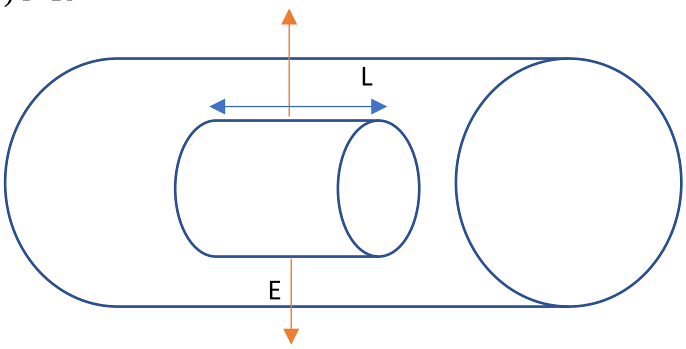
$$W_{\infty\to 1} = -\Delta U_{\infty\to 1} = -\frac{q\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(R + \sqrt{R^2+1}\right)$$

Este é o trabalho realizado pela força elétrica na partícula de carga q quando ela é trazida do infinito para a distância de 1 m do disco

2) Um cilindro isolante infinitamente longo de raio R tem uma densidade volumétrica de carga que varia com o raio como $\rho = \rho 0(a - \frac{r}{b})$, onde ρ_0, a e b são constantes positivas e r é a distância radial até o eixo do cilindro. Use a lei de Gauss para determinar o vetor campo elétrico a distâncias radiais do eixo do cilindro, tais que:

(1,25) a) r<R.

(1,25) b) r>R



(a) r<R

Aplicando a Lei de Gauss no cilindro interno de raio r:

$$\int \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$E\hat{r}.2\pi rL\hat{r} = \int_0^r \frac{\rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)2\pi r drL}{\varepsilon_0}$$

$$Er = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{ar}{2} - \frac{r^2}{3b}\right)\hat{r}$$

(b) Considerando um cilindro com r>R e aplicando a lei de Gauss, temos:

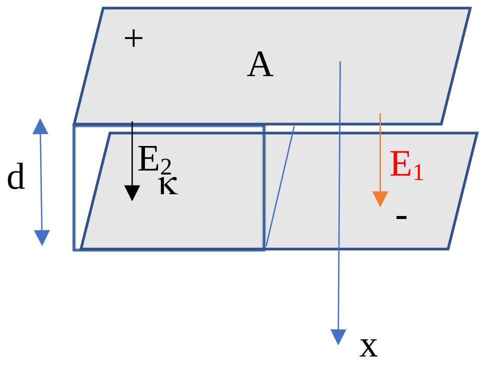
$$\int \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$E\hat{r}.2\pi rL\hat{r} = \int_0^R \frac{\rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)2\pi r drL}{\varepsilon_0}$$

$$Er = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{r\varepsilon_0}\left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right)\hat{r}$$

3) Um capacitor de placas paralelas de área *A* e separação *d*, é carregado através de uma diferença de potencial *V* e depois desligado da fonte. Uma fatia de dielétrico, de constante dielétrica κ=2, espessura *d* e área=A/2 é inserida no capacitor, como mostrado na figura. Considere que para o ar a permissividade é: $\varepsilon \cong \varepsilon_0$.
(0,5) a) Por que o campo elétrico tem que ter o mesmo valor no dielétrico e no espaço cheio de ar entre as placas, neste caso? Justifique sua resposta.
(0,5 b) Qual a relação σ_2/σ_1, sendo σ_2 a densidade de cargas na placa na região onde tem o dielétrico e σ_1 é a densidade de carga na região da placa onde tem ar.
(1,0) c) Qual é a capacitância do capacitor depois da introdução do dielétrico?
(0,5) d) Qual é a diferença de potencial depois da introdução do dielétrico? Este potencial é aumentado ou reduzido depois de ser inserido o dielétrico?



(a)

Na região com ar:

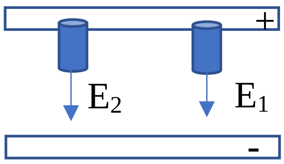
$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}.d\vec{l} = \int_0^d E_1 dx = E_1 d = V'$$

Na região com dielétrico:

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}.d\vec{l} = \int_0^d E_2 dx = E_2 d = V'$$

Como a diferença de potencial das placas é constante (V'), então E_1=E_2

b)



Aplicando a Lei de Gauss com dielétrico:

$$\oint \vec{D}.d\vec{A} = Q_{livre} = \sigma A$$

$$\varepsilon E_2 A = \sigma_2 A$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\kappa\varepsilon_0}$$

Aplicando a Lei de Gauss no ar:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 A = \frac{\sigma_1 A}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

mas E_1=E_2

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\kappa\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}$$

c) Capacitor equivalente a dois capacitores C_1 e C_2 em paralelo:

C_1 no ar com área $A/2$ e C_2 no dielletrico com área $A/2$.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon A}{2d} = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{2d}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = (1+\kappa)\frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{3\varepsilon_0 A}{2d}$$

d)

A carga (Q_0) antes da introdução do dielétrico está relacionado com o potencial (V_0) e a capacitância inicial $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$, através:

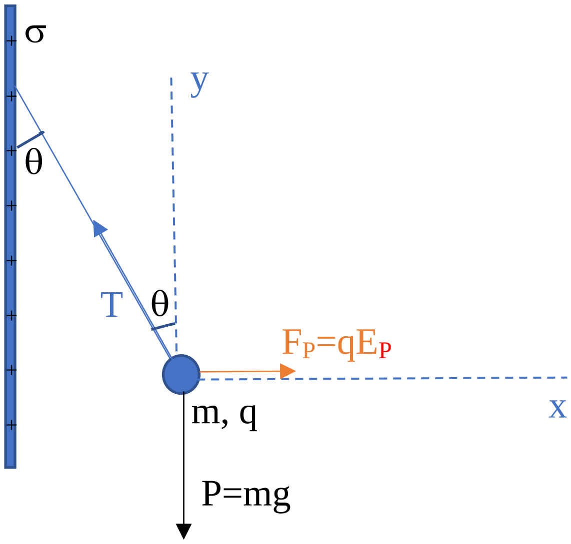
$$Q_0 = C_0 V_0$$

Após a introdução parcial do dielétrico, a carga se preserva, isto é: Q=Q_0 onde temos que:

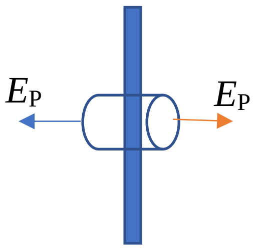
$$Q = C_{eq} V'$$

$$V' = \frac{Q_0}{C_{eq}} = \frac{C_0 V_0}{C_{eq}} = \frac{2}{3} V_0$$

4) Uma pequena esfera não condutora de massa m=1.00×10^{-5} kg e carga q=4.0×10^{-8} C (uniformemente distribuída em todo volume) está pendurada em um fio não-condutor que faz um ângulo θ=30° (em equilíbrio) com uma placa vertical fina, não condutora, uniformemente carregada (vista de perfil). Considerando a força gravitacional a que a esfera está submetida e supondo que a placa possua uma grande extensão, responda:
(1,5) a) Calcule a densidade superficial σ da placa.
(1,0) b) Calcule a tração T na corda.



Aplicando a Lei de Gauss para o plano:



$$\oint E.dA = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$2E_P A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad qE_P - T\sin\theta = 0$$

$$\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} = T\sin\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T\cos\theta - mg = 0$$

$$mg = T\cos\theta \qquad (2)$$

Fazendo $(1) \div (2)$: $\quad \tan\theta = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}$

(a) $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0 mg\tan\theta}{q} = \dfrac{2*8.85*10^{-12}*1.0*10^{-5}*9.8*\tan(\frac{\pi}{6})}{4*10^{-8}} = 2.50*10^{-8}\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$

(b) Da eq.(2), temos: $T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = \dfrac{1.0*10^{-5}*9.8}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 1.13*10^{-4}\,\mathrm{N}$