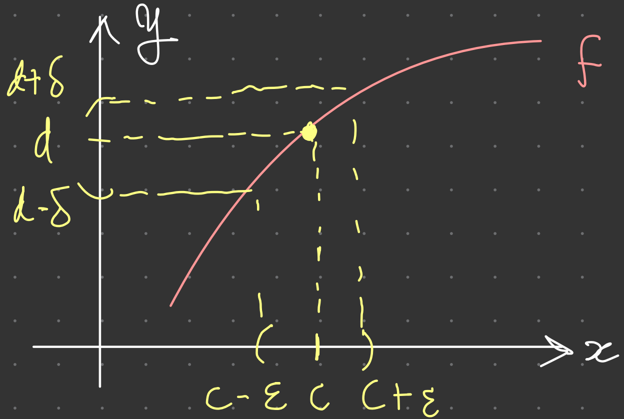
Inversa de funções Trigonométricas

Teo. Seja f uma função real definida em $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
Suponha que f estritamente crescente (decrescente) e contínua.
Então f^{-1} existe e é contínua em $f(a,b)$.

OBS: i) Já vimos que se f é derivável e invertível, então f^{-1} é derivável.

ii) $x_1 > x_2 \rightsquigarrow f(x_1) > f(x_2)$ estritamente crescente.

$\therefore$ f é injetiva e daí $f^{-1}: f(a,b) \longmapsto \mathbb{R}$.



dem. Dado $d \in f(a,b)$ $\exists!\, c \in (a,b)$ tq. $f(c)=d$. Seja $\varepsilon > 0$ tq. $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a,b)$.

Como f é inversível e estritamente monótona

$$x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \iff f(x) \in \big(f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon)\big)$$

$y = f(x)$

$$\therefore f^{-1}(y) \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \iff y \in \big(f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon)\big).$$

Assim, se $\delta = \min\{f(c) - f(c-\varepsilon),\ f(c+\varepsilon) - f(c)\}$

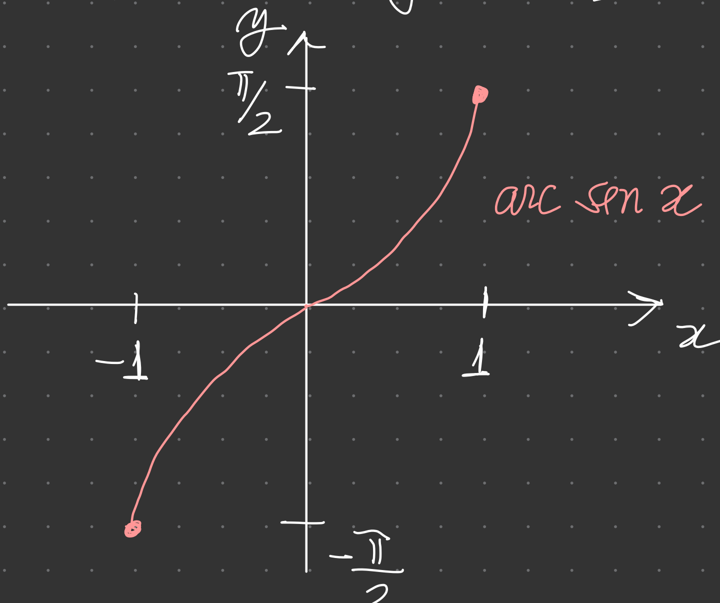
temos $|d-y| < \delta \implies f^{-1}(y) \in \big(f^{-1}(d) - \varepsilon,\ f^{-1}(d) + \varepsilon\big).$

$\blacksquare$

A função arc sen.

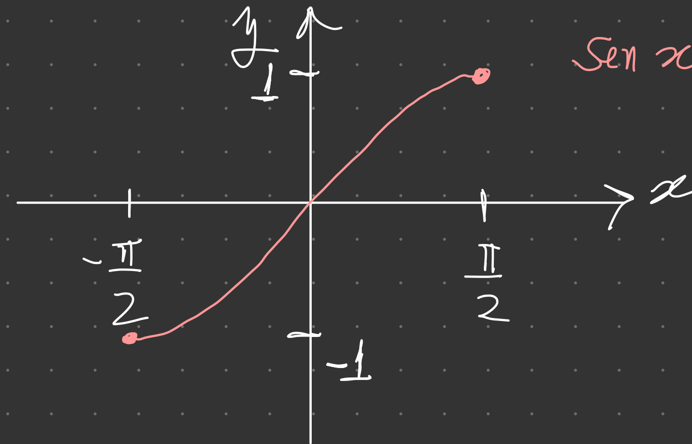
$y = \text{arc sen } x \quad x \in [-1,1]$ se só se

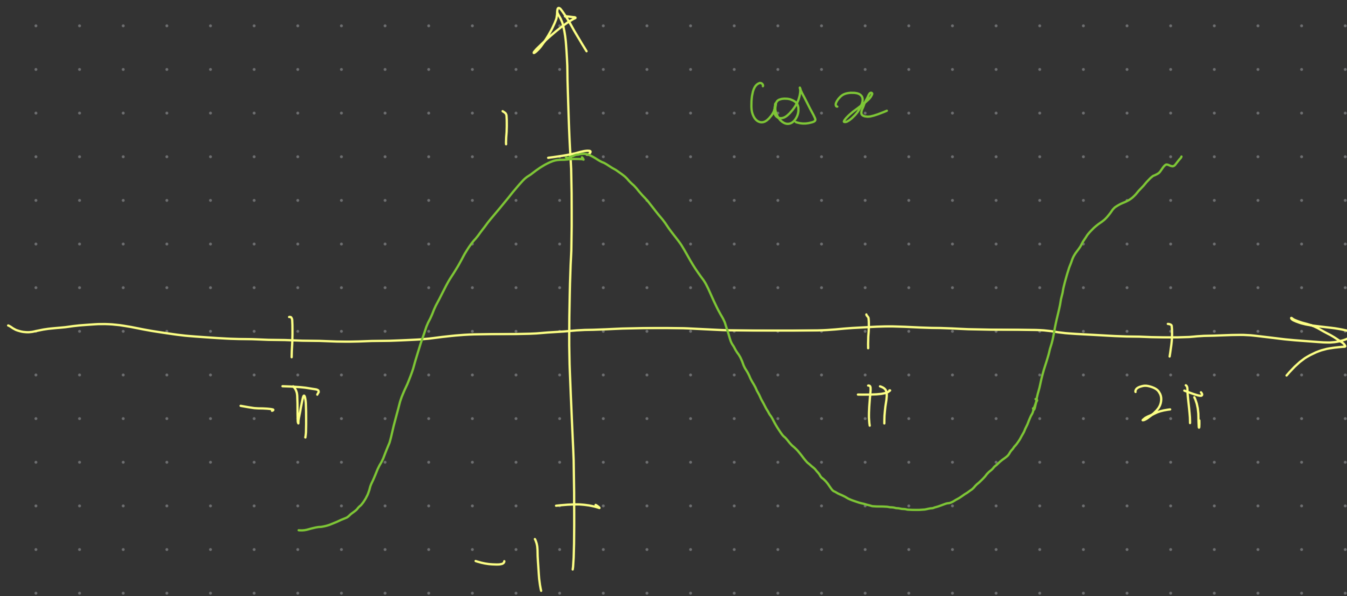
$\text{sen } y = x$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



sen x é monótona em $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

logo é invertível nesse intervalo.

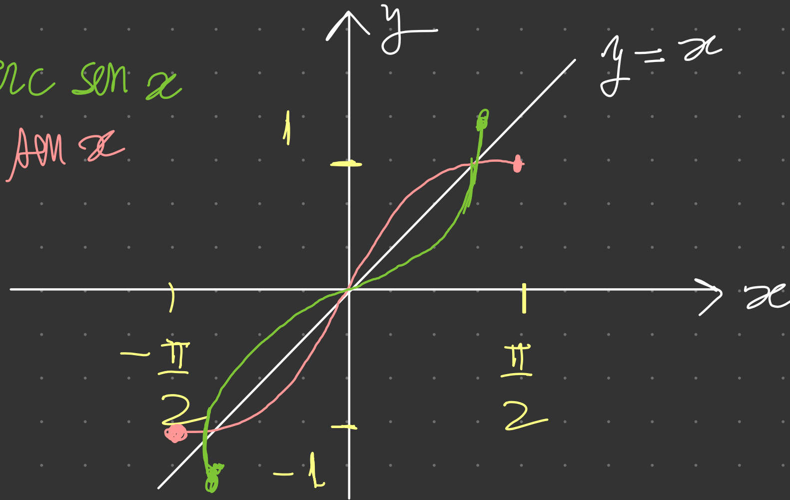




$\cos x \Big|_{[0,\pi]}$ é decrescente e logo invertível.

$\arcsin x$

$\operatorname{sen} x$

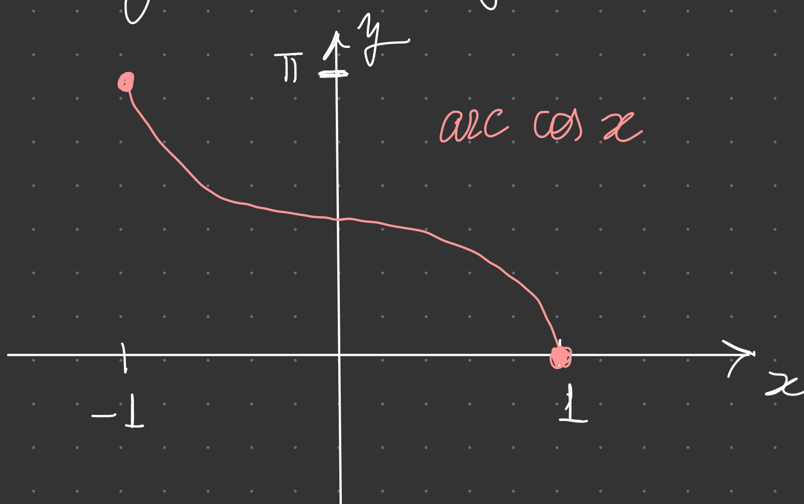


Exercício:

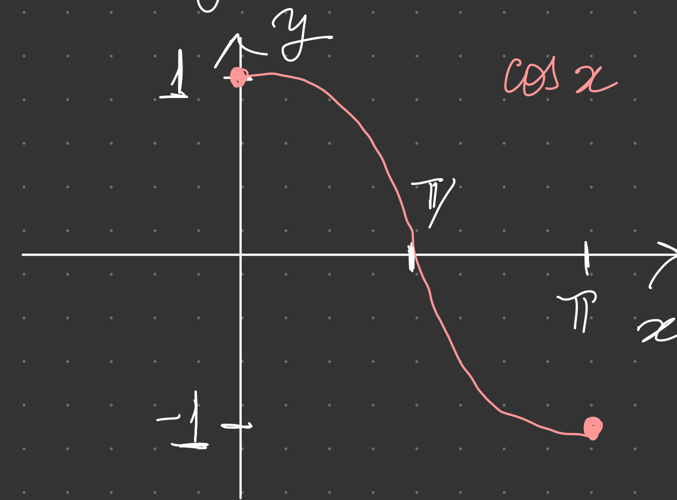
A função arc cos.

$y = \text{arc}\cos x \quad x \in [-1,1]$ se só se

$\cos y = x$ com $y \in [0,\pi]$.



$\cos x$ é monótona decrescente em $[0,\pi]$ logo invertível

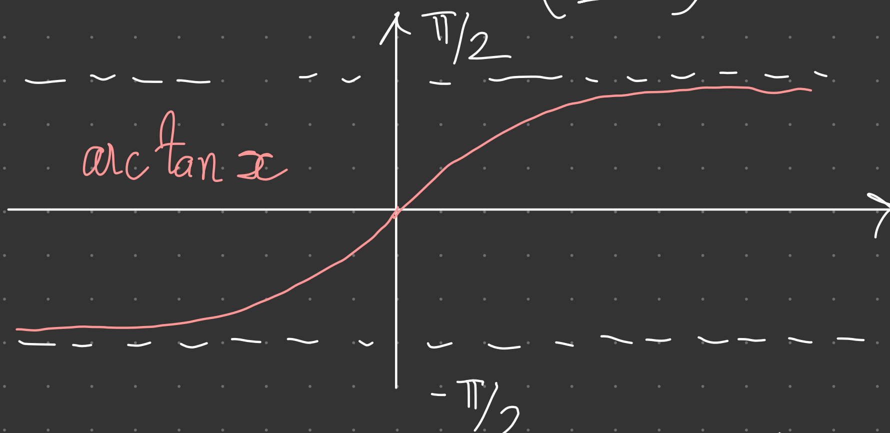


OBS: arc sen e arc cos são contínuas em $[-1,1]$ e deriváveis em $(-1,1)$.

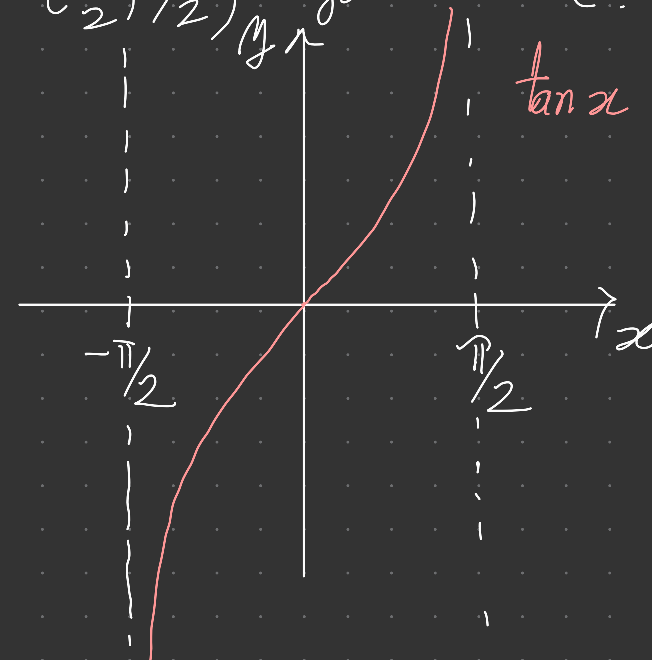
A função arc tan.

$y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, se só se

$\tan y = x$ com $y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



A função tangente é monótona crescente em $\left(\frac{-\pi}{2}, \pi/2\right)$ logo invertível.



Obs: arc tan x é contínua e derivável em $(-\pi/2, \pi/2)$.

Cálculo das derivadas

$y = \operatorname{sen} x \quad x \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$ se só se $\quad \operatorname{arc\,sen} y = x$.

Derivamos implicitamente $\operatorname{arc\,sen} y(x) = x \rightsquigarrow \dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,sen} y(x)\right) = \dfrac{d}{dx}(x)$

$\rightsquigarrow \dfrac{d}{dy}\left(\operatorname{arc\,sen} y\right) \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ onde $y(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\therefore \frac{d}{dy}\left(\operatorname{arc\,sen} y\right) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \; y \in (-1,1)$$

já que em $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ temos $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

De maneira análoga se obtém $\dfrac{d}{dy}\left(\arccos y\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \; y \in (-1,1)$.

exercício

Seja agora $y = \tan x$ para algum $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Então

$$\arctan y = x \rightsquigarrow \left(\arctan y\right)' \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\tan x\right)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\left(-\operatorname{sen} x\right)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \left(\arctan y\right)' = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}, \; y \in \mathbb{R}.$$

Teorema do valor médio

Algumas observações sobre o sinal da derivada.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} q(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$\uparrow$ está definida em $\mathrm{Dom}(f) / \{c\}$.

(i) f monótona, estritamente crescente numa vizinhança de c

$$\left.\begin{array}{l} x > c \rightsquigarrow f(x) \overset{<}{>} f(c) \\ x < c \rightsquigarrow f(x) \overset{>}{<} f(c) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} q(x) < 0 \\ q(x) > 0. \end{array}$$

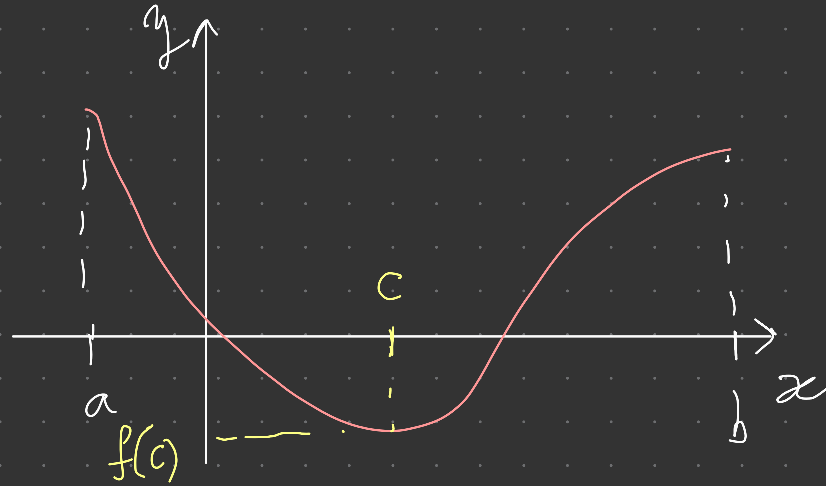
logo $f'(c) \geq 0$.

Analogamente f é estritamente decrescente $f'(c) \leq 0$.

(ii) $f(x) = x^3$ é uma estritamente crescente

$$f'(x) = 3x^2 \rightsquigarrow f'(0) = 0.$$

$$\therefore f'(x) \geq 0.$$



f

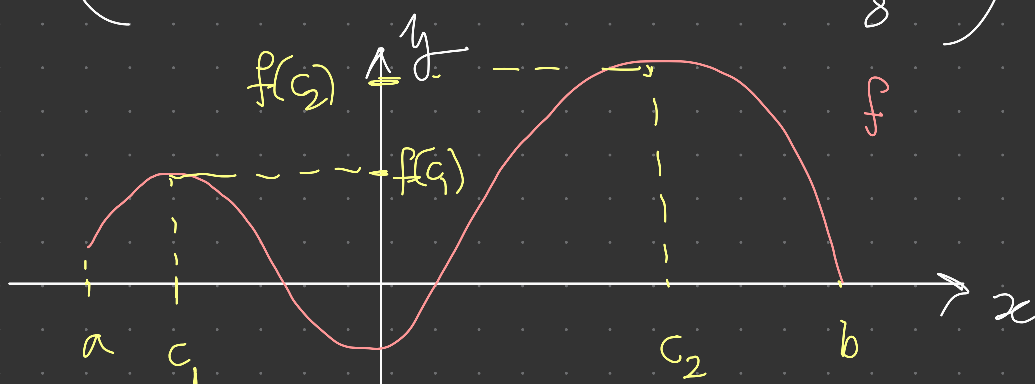
$f(c) \leq f(x) \ \forall x$

$$\begin{cases} f'(c) = 0 \rightsquigarrow f(c) \text{ é máximo ou mínimo?} \\ f'(x) > 0 \quad x > c \rightsquigarrow f \text{ é cresente?} \\ f'(x) < 0 \quad x < c \rightsquigarrow f \text{ é descresente?} \end{cases}$$

Def: f possui máximo (ou mínimo) local em $x = c$ se existe $N_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ tal que

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in N_\delta(c)$$

$$\left(f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in N_\delta(c) \right).$$



Teo. $f:(a,b)\longmapsto\mathbb{R}$ derivável. Se existir máximo (ou mínimo) local em $x=c$, então $f'(c)=0$.

dem. Seja $f(c)$ um máximo local. ie.

$$f(c)\geqslant f(x)\quad\forall x\in(c-\delta,c+\delta)=N_\delta(c)$$

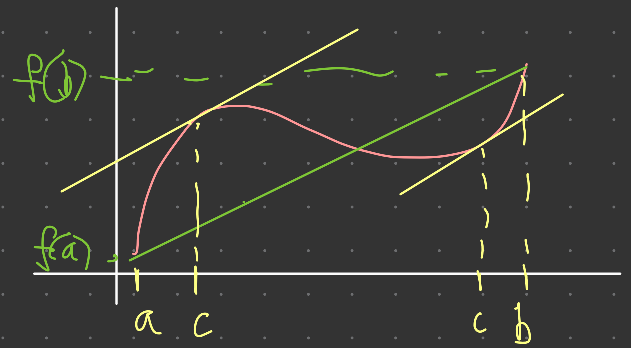
$$g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0 \text{ se } x>c \text{ em } N_\delta(c)$$

e $g(x)\geqslant 0$ se $x<c \rightsquigarrow f'(c)=\lim_{x\to c} g(x)=0$

já que $\lim_{x\to c^+} g(x)\leqslant 0$ e $\lim_{x\to c^-} g(x)\geqslant 0$. ∎

Teo Valor médio $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Então $\exists$ $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Aplicação. Seja $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ derivável.

(i) $f'(x) \geq 0$ em (a,b) $\rightsquigarrow$ f é crescente.

$\quad\;\; >$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ estritamente

<u>dem.</u> $x_1 < x_2$ em (a,b) QM. $f(x_1) < f(x_2)$.

Note que $f : [x_1, x_2] \subset (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ é contínua e derivável.

Pelo TVM $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.q. $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Pela hipótese $f'(c) \overset{>}{\geq} 0$.

$$\therefore \quad \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{x_2 - x_1 > 0} \overset{>}{\geq} 0 \rightsquigarrow f(x_2) \overset{>}{\geq} f(x_1).$$

(ii) $f'(x) \overset{<}{\leq} 0$ em $(a,b) \rightsquigarrow f$ é estritamente decrescente.

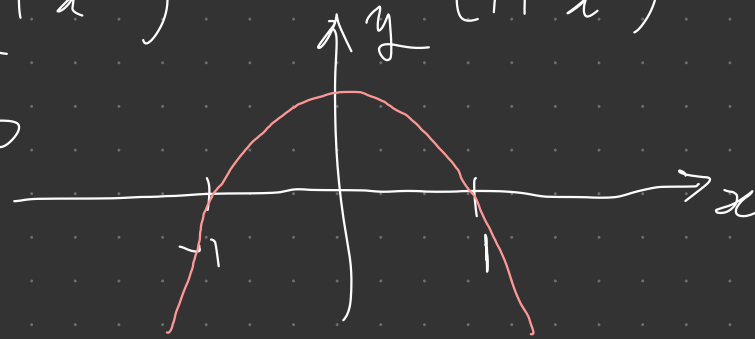
Exemplo: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Determine os valores de x para os quais f é crescente.

Solução. Basta encontrar $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - x^2 \geq 0$$



R. $x \in [-1, 1]$.