Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Análise Harmônica - continuação

Nelson Kuhl

IME/USP

15 de outubro de 2020

Períodos arbitrários

Para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódicas de período T, podemos proceder da seguinte forma, usando a idéia de mudança de variável. Se f tem período T, a função

$$F(y) = f\left(\frac{T}{2\pi}\, y\right)$$

tem período 2π. Obtenha então $G_m(y)$, a aproximação de F até o harmônico de ordem m. A aproximação para f é dada por

$$g_m(x) = G_m\left(\frac{2\pi}{T}\, x\right).$$

Verifique como exercício que o problema pode ser formulado da seguinte maneira.

Períodos arbitrários

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e periódica de período T, aproxime-a por uma função da forma

$$g_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \right] \tag{1}$$

de forma a minimizar o erro quadrático

$$EQ(f, g_m) = \sqrt{\int_0^T [f(x) - g_m(x)]^2 \, dx}. \tag{2}$$

Note que é um problema de mínimos quadrados cujo erro quadrático está associado ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T u(x) v(x) \, dx. \tag{3}$$

Períodos arbitrários

Usando mudança de variável, podemos obter a ortogonalidade das funções usadas na aproximação e as fórmulas

Coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx, \;\; k \geq 1, \tag{4}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx, \;\; k \geq 1. \tag{5}$$

Observações

1. As integrais podem ser calculadas em **qualquer intervalo de comprimento** T, sem alterar os resultados;

Observações

1. As integrais podem ser calculadas em **qualquer intervalo de comprimento** T, sem alterar os resultados;
2. usando-se o intervalo de integração $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, conclui-se que, se f **for uma função par**, então $b_k = 0$, $k \geq 1$, e se f **for uma função ímpar**, então $a_k = 0$, $k \geq 0$;

Observações

1. As integrais podem ser calculadas em **qualquer intervalo de comprimento** T, sem alterar os resultados;
2. usando-se o intervalo de integração $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, conclui-se que, se f **for uma função par**, então $b_k = 0$, $k \geq 1$, e se f **for uma função ímpar**, então $a_k = 0$, $k \geq 0$;
3. os teoremas de convergência são os mesmos, com as devidas adaptações;

Observações

1. As integrais podem ser calculadas em **qualquer intervalo de comprimento** T, sem alterar os resultados;
2. usando-se o intervalo de integração $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, conclui-se que, se f **for uma função par**, então $b_k = 0,\ k \geq 1$, e se f **for uma função ímpar**, então $a_k = 0,\ k \geq 0$;
3. os teoremas de convergência são os mesmos, com as devidas adaptações;
4. quando $T = 2\pi$, as fórmulas (1)-(5) se reduzem às fórmulas para período 2π, como esperado.

Funções definidas em um intervalo

Considere uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua (i.e., f tem no máximo uma quantidade finita de pontos de descontinuidade em $[a, b]$ e nestes pontos os limites à direita e à esquerda existem). Podemos fazer a análise harmônica de f considerando-se, por exemplo, a sua extensão periódica $\tilde{f}$ de período $(b - a)$ à reta toda:

(i) $\tilde{f}(x) = f(x)$, se $a < x < b$;

(ii) $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = [f(a_+) + f(b_-)]/2$ (pode ser qualquer número real, mas a série de Fourier converge para este);

(iii) $\tilde{f}$ tem período $(b - a)$.

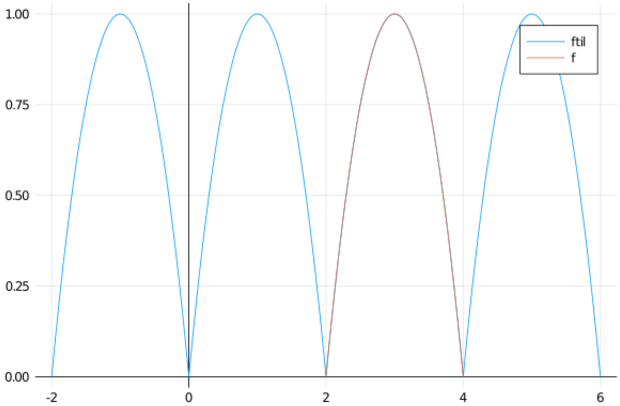
Os coeficientes de Fourier de f são, de acordo com (4) e (5), iguais a

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,\;\; a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{b-a}x\right)\,dx,\;\; k \geq 1,$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\left(k\frac{2\pi}{b-a}x\right)\,dx,\;\; k \geq 1.$$

Funções definidas em um intervalo

Se quisermos usar outro intervalo de integração de comprimento (b-a), precisamos saber a expressão para $\tilde{f}$ nele. Por exemplo, suponha que queiramos fazer a análise harmônica da função $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-2)(4-x)$, $2 \leq x \leq 4$ ($a = 2$ e $b = 4$). A sua extensão $\tilde{f}$ periódica de período 2 tem um gráfico da forma



Funções definidas em um intervalo

Note que

$$\tilde{f}(x) = x(2-x), \text{ se } 0 \le x \le 2.$$

Funções definidas em um intervalo

Note que

$$\tilde{f}(x) = x(2-x), \text{ se } 0 \le x \le 2.$$

Além disso, $\tilde{f}$ é uma função par. Logo, os coeficientes de Fourier de f são $b_k = 0$, $k \ge 1$, e os a_k podem ser calculados pelas expressões

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 x(2-x)\,dx = \frac{2}{3}, \\
a_k &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{2}x\right)\,dx = 2\int_0^1 \tilde{f}(x)\cos(k\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 x(2-x)\cos(k\pi x)\,dx = -\frac{4}{k^2\pi^2},\ k \ge 1.
\end{aligned}$$

Funções definidas em um intervalo

Note que

$$\tilde{f}(x) = x(2-x), \text{ se } 0 \le x \le 2.$$

Além disso, $\tilde{f}$ é uma função par. Logo, os coeficientes de Fourier de f são $b_k = 0$, $k \ge 1$, e os a_k podem ser calculados pelas expressões

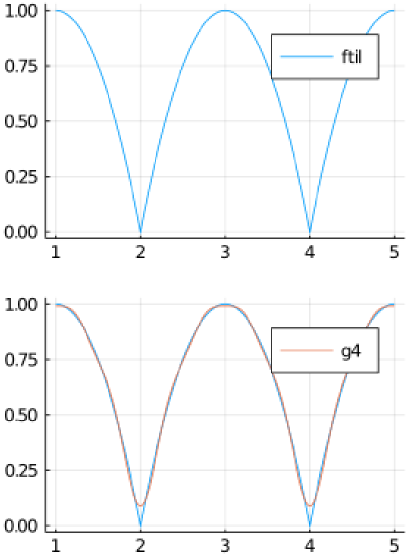
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 x(2-x)\,dx = \frac{2}{3}, \\ a_k &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{2}x\right)\,dx = 2\int_0^1 \tilde{f}(x)\cos(k\pi x)\,dx \\ &= 2\int_0^1 x(2-x)\cos(k\pi x)\,dx = -\frac{4}{k^2\pi^2}, \; k \ge 1. \end{aligned}$$

Neste caso, g_m tem a forma

$$g_m(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}.$$

Figuras no intervalo [1,5]

Figuras no intervalo [1,5]



Convergência e limite de séries numéricas

Convergência e limite de séries numéricas

Como a função $\tilde{f}$ do exemplo anterior é contínua, com derivada seccionalmente contínua e periódica (de período 2), a sua série de Fourier converge para ela em todo ponto da reta:

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Convergência e limite de séries numéricas

Como a função $\tilde{f}$ do exemplo anterior é contínua, com derivada seccionalmente contínua e periódica (de período 2), a sua série de Fourier converge para ela em todo ponto da reta:

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, como $\tilde{f}(0) = 0$, obtemos da expressão acima o resultado

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sobre a convergência da série de Fourier

Note que, **somente no intervalo** $[2,4]$, a série de Fourier converge para $f(x) = (x-2)(4-x)$:

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^2} = (x-2)(4-x), \quad \text{se} \quad 2 \le x \le 4.$$

Em outros pontos a convergência é para $\tilde{f}$. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^2} = (x-4)(6-x), \quad \text{se} \quad 4 \le x \le 6,$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^2} = x(2-x), \quad \text{se} \quad 0 \le x \le 2,$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^2} = -(x+2)x, \quad \text{se} \quad -2 \le x \le 0.$$