Aula 16 – Incerteza e Risco

Piracicaba, Novembro de 2021

Professora Dra. Andréia Adami

Estatística Matemática

- Definições

- Variável aleatória: é a variável que pode assumir diferentes valores no domínio da função densidade de probabilidade;

Estatística Matemática

- Definições

- Variável aleatória: é a variável que pode assumir diferentes valores no domínio da função densidade de probabilidade;

- Função Densidade de Probabilidade: é a função $f(x)$ que associa, a cada possível valor x_i da variável aleatória X, sua respectiva probabilidade de ocorrência;

Estatística Matemática

- Definições

- Valor esperado: o valor esperado da variável aleatória X – E(X), é a média da distribuição densidade de probabilidade.

✓ Se a variável aleatória é discreta: $\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}]$

✓ Se a variável aleatória é contínua: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$

Estatística Matemática

- Definições

- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória X em relação ao seu valor esperado,

✓ Se a variável aleatória é discreta: $\mathrm{V}\boldsymbol{\mathrm{ar}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{2}}) - [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})]^{\boldsymbol{2}}$

$$= \sigma_{\mathrm{X}}^2 = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathrm{n}} [x_i - E(X)]^2 f(x_i)$$

Estatística Matemática

- Definições

- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória em relação ao valor esperado da variável aleatória X,

✓Se a variável aleatória é contínua:

$$\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(X)\boldsymbol{dx}$$

Estatística Matemática

- Definições

- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória em relação ao valor esperado da variável aleatória X,

✓Se a variável aleatória é contínua:

$$\boldsymbol{Var(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(X)\boldsymbol{dx}$$

✓O Desvio padrão: $\sqrt{\sigma_X^2}$

Valor esperado e jogos justos

- Valor Esperado: Seja uma loteria X com prêmios x_1, x_2, ...,x_n, e probabilidades associadas π_1, π_2, ..., π_n. O valor esperado da loteria será:

$$VE(X) = x_1 \pi_1 + x_2 \pi_2 + \ldots + x_n \pi_n$$

✓ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i$

- Jogo Justo: VE = 0, ou preço para jogar igual ao VE.

Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R$1,00, se der cara você ganha $1 e se der coroa você perde $1:

Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R$1,00, se der cara você ganha $1 e se der coroa você perde $1:

$$\text{Valor esperado do jogo: VE} = 0{,}5 * (+1) + 0{,}5 * (-1) = 0$$

Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R$1,00, se der cara você ganha $1 e se der coroa você perde $1:

$$\text{Valor esperado do jogo: VE} = 0{,}5 * (+1) + 0{,}5 * (-1) = 0$$

- Exemplo 2: jogue uma moeda com seu amigo se der cara você ganha $10 e se der coroa você perde $1:

Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R$1,00, se der cara você ganha $1 e se der coroa você perde $1:

$$\text{Valor esperado do jogo: VE} = 0{,}5 * (+1) + 0{,}5 * (-1) = 0$$

- Exemplo 2: jogue uma moeda com seu amigo se der cara você ganha $10 e se der coroa você perde $1:

$$\text{Valor esperado do jogo: VE} = 0{,}5 * (+10) + 0{,}5 * (-1) = 4{,}5$$

Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha $\$2^n$.

✓ $x_1 = , x_2 = , x_3 = , \ldots, x_n =$

Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha $\$2^n$.

✓ $x_1 = \$2,\ x_2 = \$4,\ x_3 = \$8,\ \ldots,\ x_n = \$2^n$

Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha $\$2^n$.

✓ $x_1 = \$2,\ x_2 = \$4,\ x_3 = \$8,\ \ldots,\ x_n = \$2^n$

- A probabilidade de sair cara no *n-ésimo* lançamento é:

✓ $\pi_1 =\ ,\ \pi_2 =\ ,\ldots,\ \pi_n =$

Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha $\$2^n$.

✓ $x_1 = \$2,\ x_2 = \$4,\ x_3 = \$8,\ \ldots,\ x_n = \$2^n$

- A probabilidade de sair cara no *n-ésimo* lançamento é:

✓ $\pi_1 = ½,\ \pi_2 = ¼, \ldots,\ \pi_n = 1/2^n$

- Valor Esperado:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = \infty$$

Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.

Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.

✓Considerando que a utilidade marginal da riqueza é normalmente decrescente, o paradoxo de St. Petersburgo converge para um valor finito de utilidade esperada.

Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.

✓Considerando que a utilidade marginal da riqueza é normalmente decrescente, o paradoxo de St. Petersburgo converge para um valor finito de utilidade esperada.

✓A utilidade esperada é relevante para a definição do valor que o indivíduo está disposto a pagar pelo jogo.

Utilidade Esperada

- Utilidade Esperada:

$$EU(X) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i U(x_i)$$

Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por: $U(x_i) = \ln x_i$

Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1

- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por: $U(x_i) = \ln x_i$

- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente:

Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por: $U(x_i) = ln\ x_i$

- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente: (U' > 0 e U'' < 0),

✓Utilidade esperada = $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i) =$

Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por: $U(x_i) = ln\ x_i$

- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente: $(U' > 0 \text{ e } U'' < 0)$,

✓Utilidade esperada = $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i) = 1{,}39$

Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1

- A solução de Bernoulli para o paradoxo de São Petersburgo, não resolve completamente o problema, enquanto não houver limite superior para a função de utilidade, o paradoxo pode ser regenerado redefinindo os prêmios do jogo.

✓Considerando a função: $U(x_i) = ln[e^{2^i}] = 2^i$ e prêmio $x_i = e^{2^i}$

✓Lançando a moeda uma quinta vez, o indivíduo poderia ganhar $e^{2^5} = \$79\ trilhões$ com probabilidade $\frac{1}{2^5}$ = 0,031. A ideia de que um indivíduo pagaria trilhões para jogar parece improvável, o que mantém os jogos de São Petersburgo como paradoxo.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- John von Neumann e Oscar Morgenstern no trabalho entitulado: *The theory of games and Economic Behavior* (1944), desenvolveram os fundamentos matemáticos para a solução do Paradoxo de São Petersburgo de Bernoulli incorporando os axiomas básicos da racionalidade econômica.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- John von Neumann e Oscar Morgenstern no trabalho entitulado: *The theory of games and Economic Behavior* (1944), desenvolveram os fundamentos matemáticos para a solução do Paradoxo de São Petersburgo de Bernoulli incorporando os axiomas básicos da racionalidade econômica.

✓Mostraram que um indivíduo racional faz escolhas sob incerteza de modo a maximizar o valor esperado da função Utilidade da riqueza (W) - U (W) e não o valor esperado do *pay-off*.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- Suponha que existam n prêmios que o indivíduo pode ganhar em uma loteria, denotados por x_1, x_2, ...,x_n, ordenados de forma crescente. Então, se o indivíduo prefere x_n a x_1, podemos considerar o índice de Utilidade como: $U(x_1) = 0$ *e* $U(x_n) = 1$.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- Suponha que existam *n* prêmios que o indivíduo pode ganhar em uma loteria, denotados por x_1, x_2, ...,x_n, ordenados de forma crescente. Então, se o indivíduo prefere x_n a x_1, podemos considerar o índice de Utilidade como: $U(x_1)= 0$ *e* $U(x_n)= 1$.

- Experimento: peça ao seu colega para declarar a probabilidade π_i que o deixaria indiferente entre x_i com certeza e uma loteria com prêmio x_n e probabilidade π_i ou x_1 com probabilidade $(1-\pi_i)$.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- A técnica de von Neumann-Morgenstern, define a utilidade de x_i, como a utilidade esperada em relação ao resultado que o indivíduo considera igualmente desejável.

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1)$$

- Considerando $U(x_n) = 1$ and $U(x_1) = 0$

Teorema de von Neumann-Morgenstern

- A técnica de von Neumann-Morgenstern, define a utilidade de x_i, como a utilidade esperada em relação ao resultado que o indivíduo considera igualmente desejável.

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1)$$

- Considerando $U(x_n) = 1$ and $U(x_1) = 0$

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1 - \pi_i) \cdot 0 = \pi_i$$

Maximização da Utilidade Esperada

- Considere 2 jogos, o primeiro – A, com prêmio x_2 e probabilidade *a* e o segundo com prêmio x_3 e probabilidade (*1-a*)

$$\textit{Utilidade Esperada (A)} = a \cdot U(x_2) + (1-a) \cdot U(x_3)$$

- O segundo – B, com prêmio x_4 e probabilidade *b* e o segundo com prêmio x_5 e probabilidade (*1-b*)

$$\textit{Utilidade Esperada (B)} = b \cdot U(x_4) + (1-b) \cdot U(x_5)$$

✓Qual jogo o indivíduo irá escolher?

Maximização da Utilidade Esperada

- Considere 2 jogos, o primeiro –A, com prêmio x_2 e probabilidade *a* e o segundo com prêmio x_3 e probabilidade (*1-a*)

$$\textit{Utilidade Esperada (A)} = a \cdot U(x_2) + (1-a) \cdot U(x_3)$$

- O segundo – B, com prêmio x_4 e probabilidade *b* e o segundo com prêmio x_5 e probabilidade (*1-b*)

$$\textit{Utilidade Esperada (B)} = b \cdot U(x_4) + (1-b) \cdot U(x_5)$$

✓O indivíduo escolherá A apenas se sua Utilidade Esperada superar a de B.

Maximização da Utilidade Esperada

- Substituindo U(x_i) por π_i:

$$Utilidade\ Esperada\ (A) = a \cdot \pi_2 + (1\text{-}a) \cdot \pi_3$$

$$Utilidade\ Esperada\ (B) = b \cdot \pi_4 + (1\text{-}b) \cdot \pi_5$$

✓O indivíduo escolherá A se e apenas se:

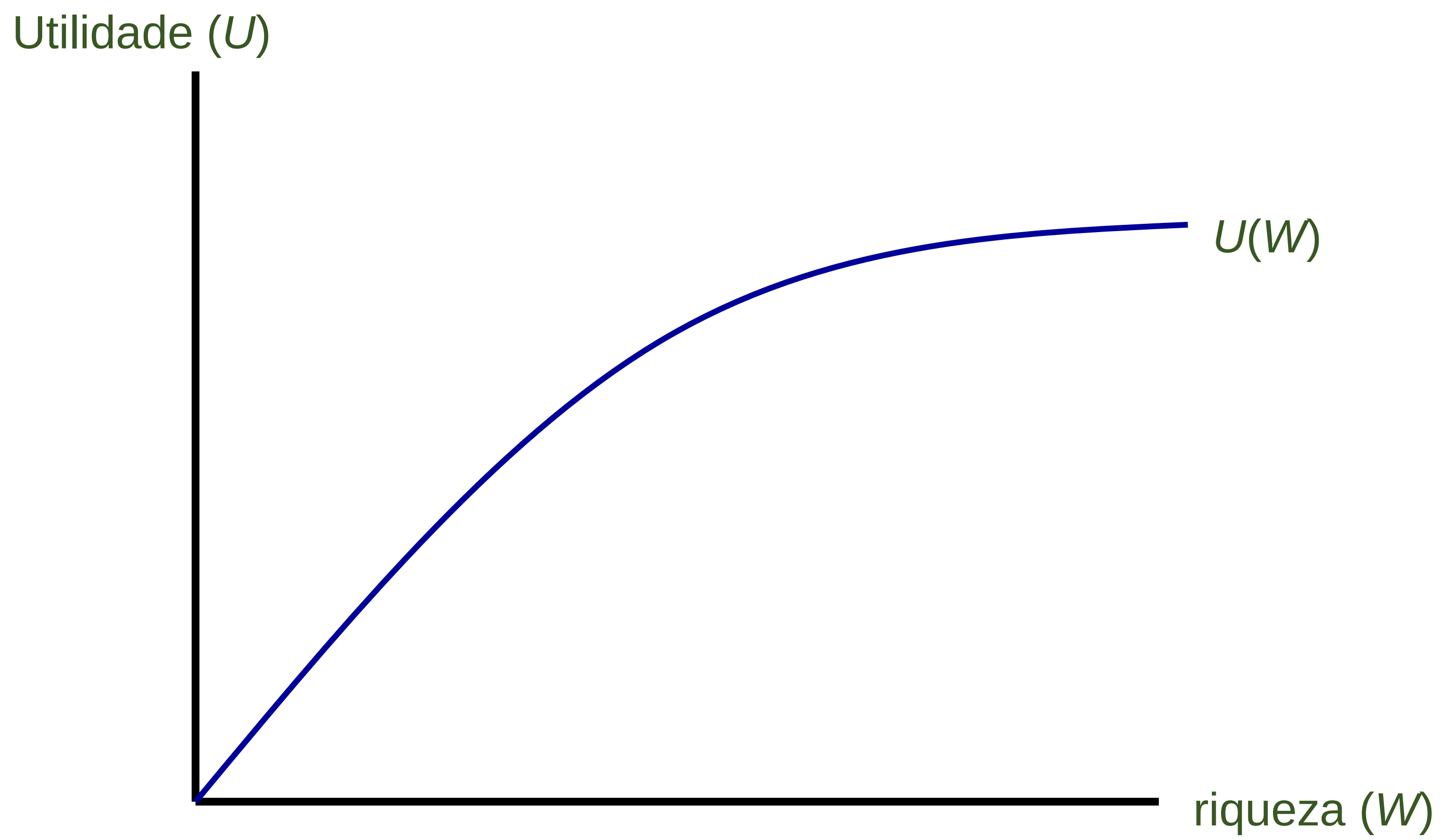
$$a \cdot \pi_2 + (1\text{-}a) \cdot \pi_3 > b \cdot \pi_4 + (1\text{-}b) \cdot \pi_5$$

✓R.: o indivíduo escolherá a opção que oferecer o maior nível esperado de utilidade, ou aquele que maximiza o valor esperado da função utilidade de von Neumann-Morgenstern.

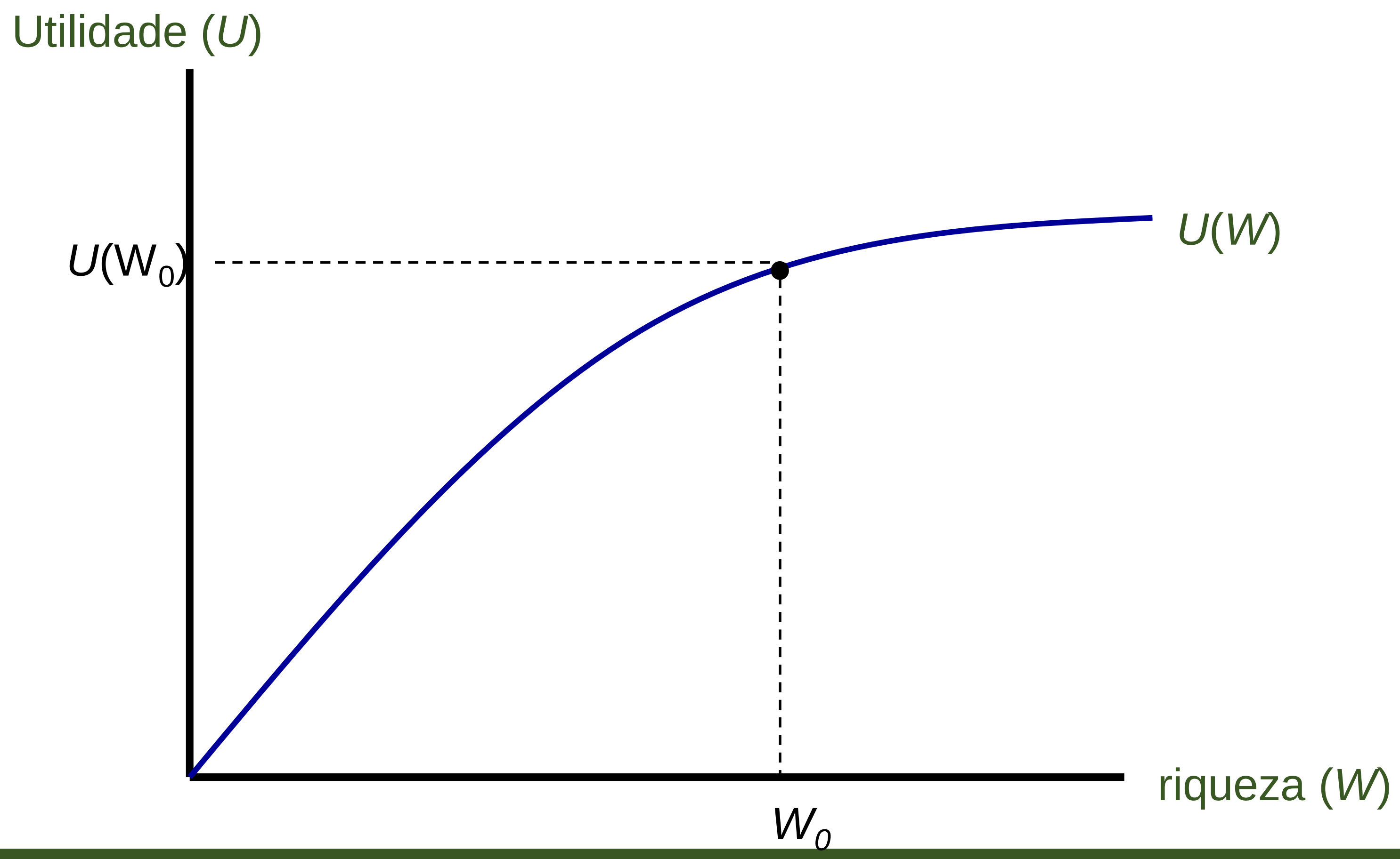
Aversão ao Risco e Seguro

- Poucas pessoas optariam por fazer uma aposta de \$10.000 se o resultado fosse 0, em média.
- Isso porque, o valor monetário do prêmio não reflete a Utilidade do prêmio.
- A Utilidade que a pessoa obtém de um aumento no valor do prêmio aumenta menos rapidamente que o valor monetário (riqueza) desse prêmio.
- Assim, uma aposta justa em termos monetários, pode não ser justa em termos de Utilidade, pois a utilidade marginal de \$1 extra é decrescente.

Aversão ao Risco



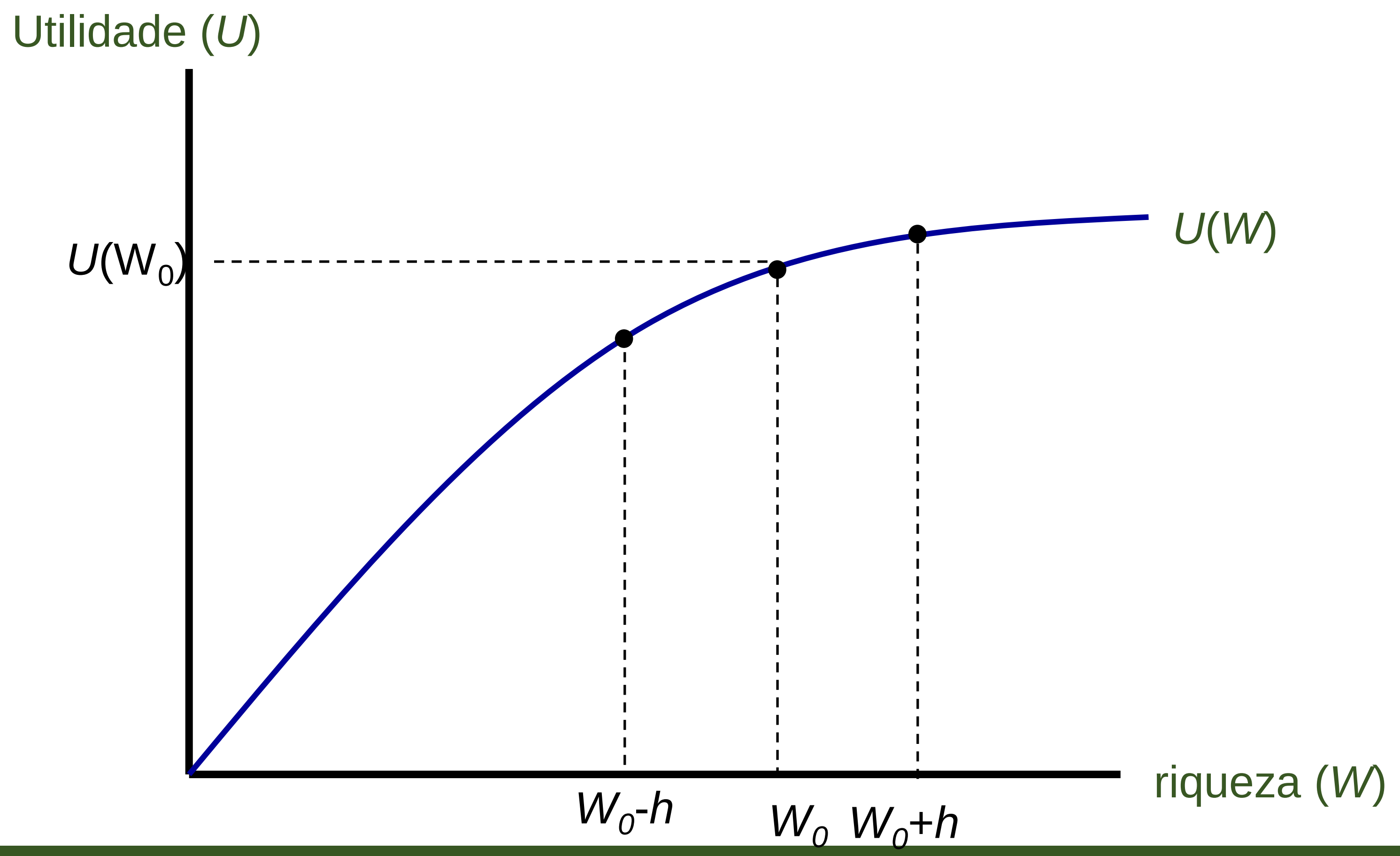
Aversão ao Risco



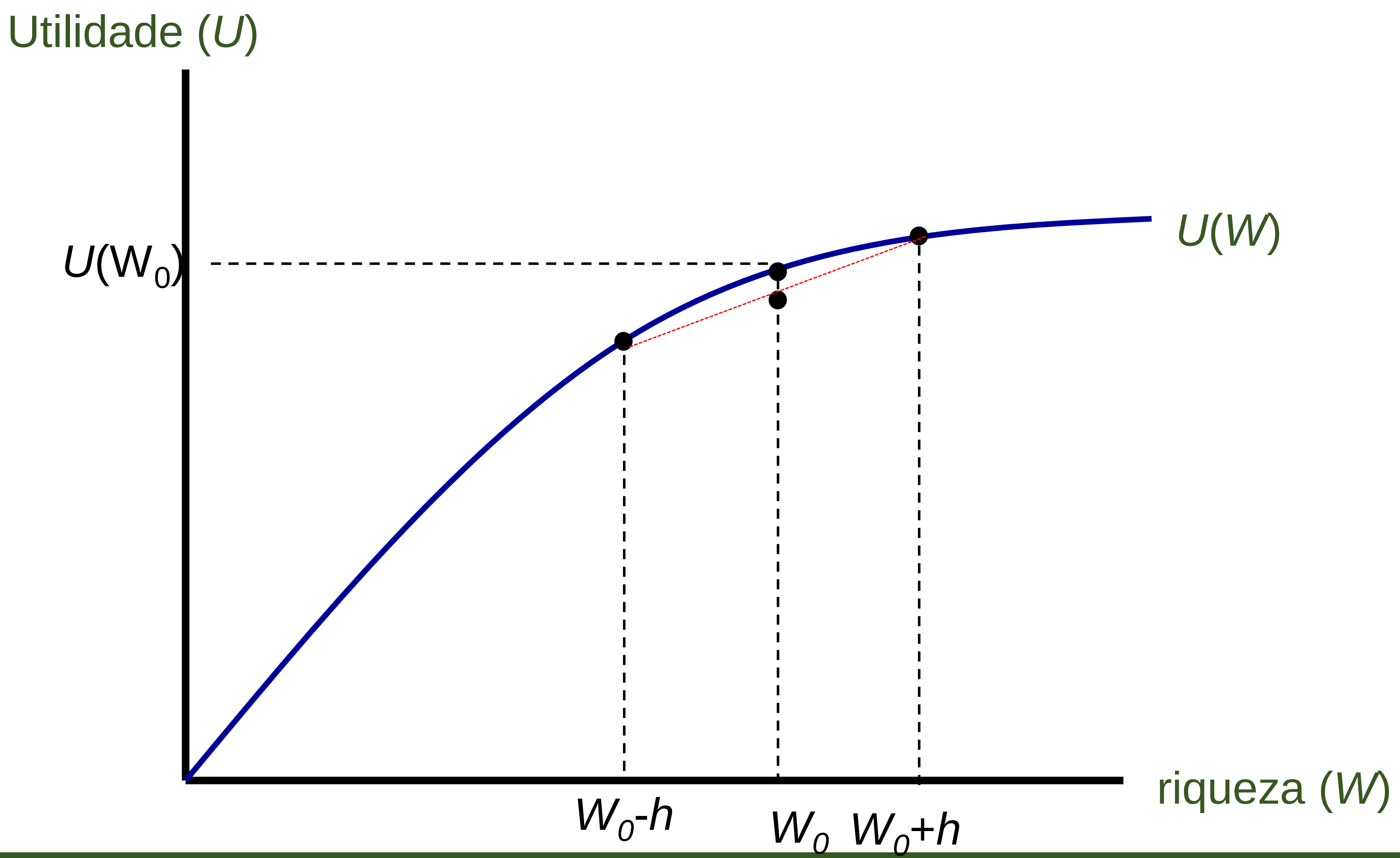
Aversão ao Risco

- ✓Utilidade esperada da aposta A - EU(A) = ½ $U(W_0+h)$ + ½ $U(W_0-h)$

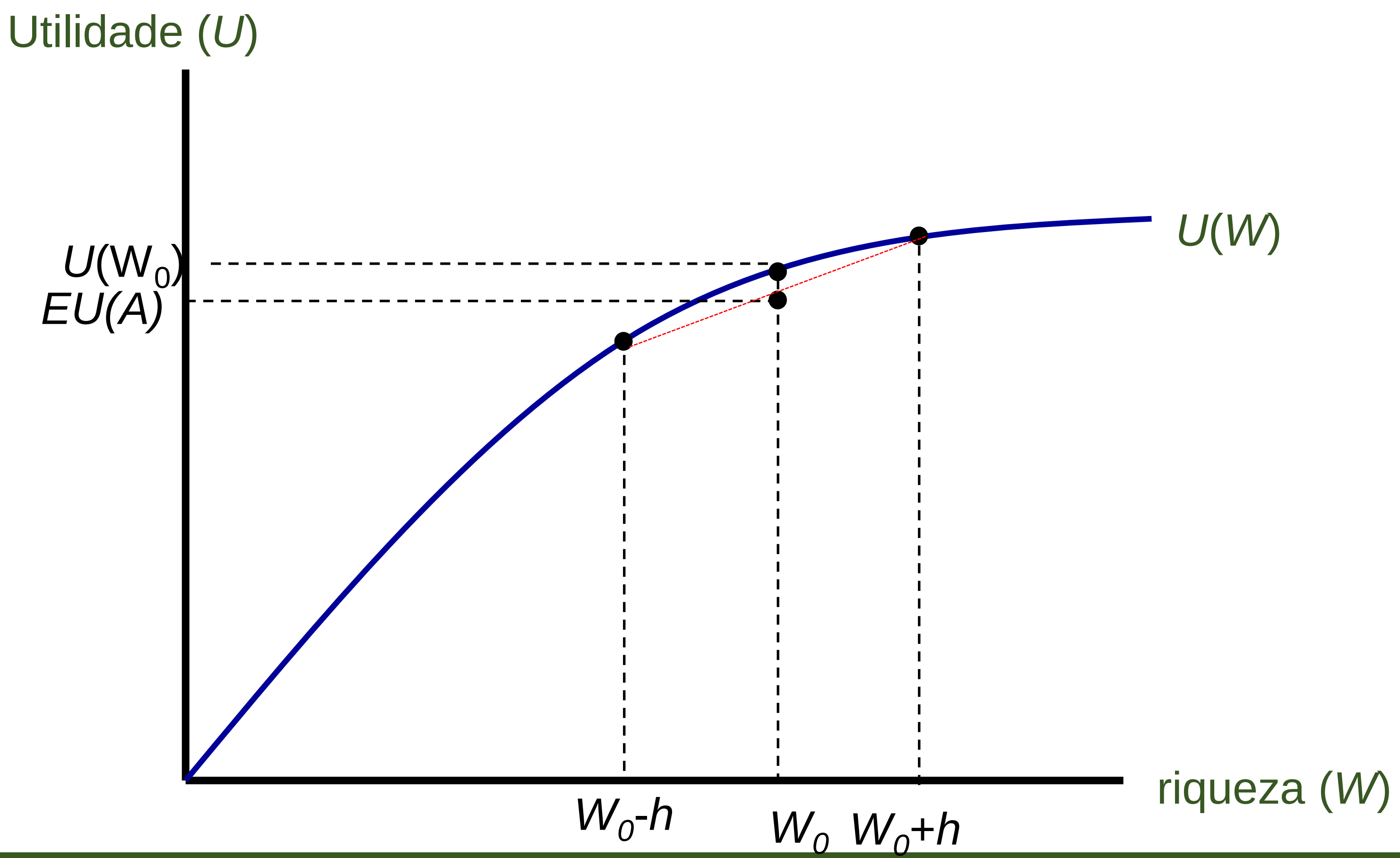
Aversão ao Risco



Aversão ao Risco



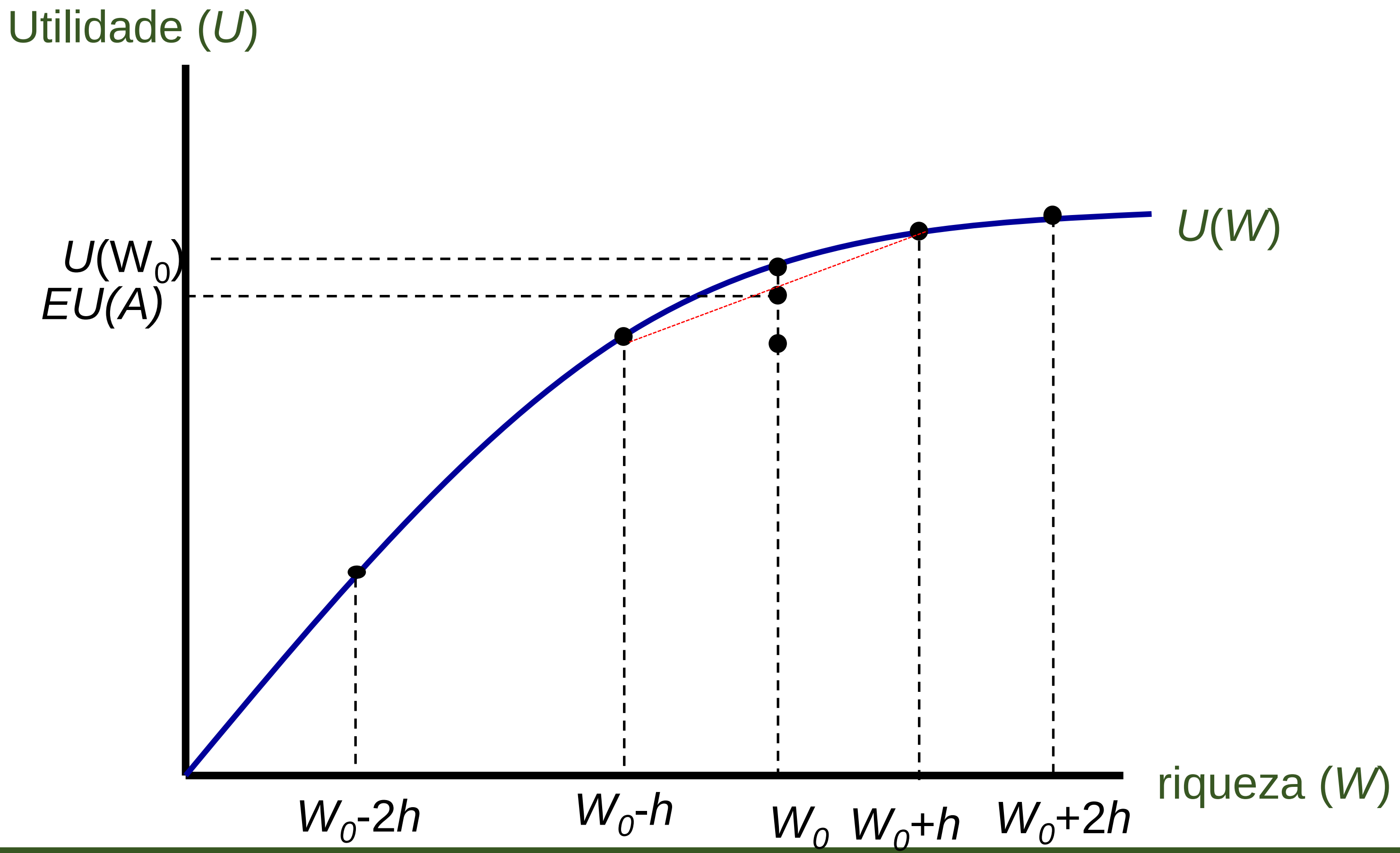
Aversão ao Risco



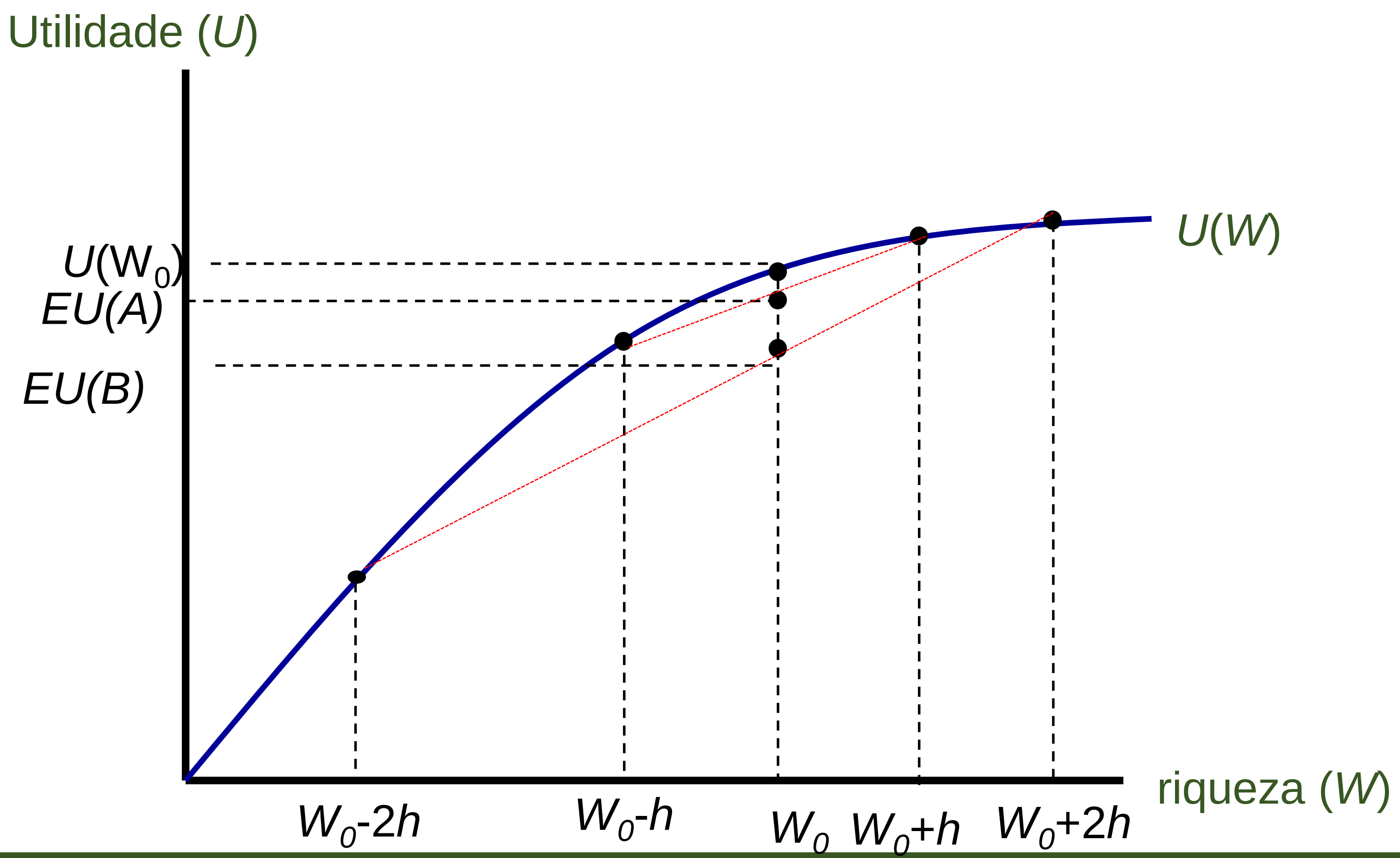
Aversão ao Risco

- ✓Utilidade esperada da aposta A - EU(A) = ½ $U(W_0+h)$ + ½ $U(W_0-h)$
- ✓Utilidade esperada da aposta B - EU(B) = ½ $U(W_0+2h)$ + ½ $U(W_0-2h)$

Aversão ao Risco



Aversão ao Risco



Aversão ao Risco

- ✓Utilidade esperada da aposta A - EU(A) = ½ $U(W_0+h)$ + ½ $U(W_0-h)$

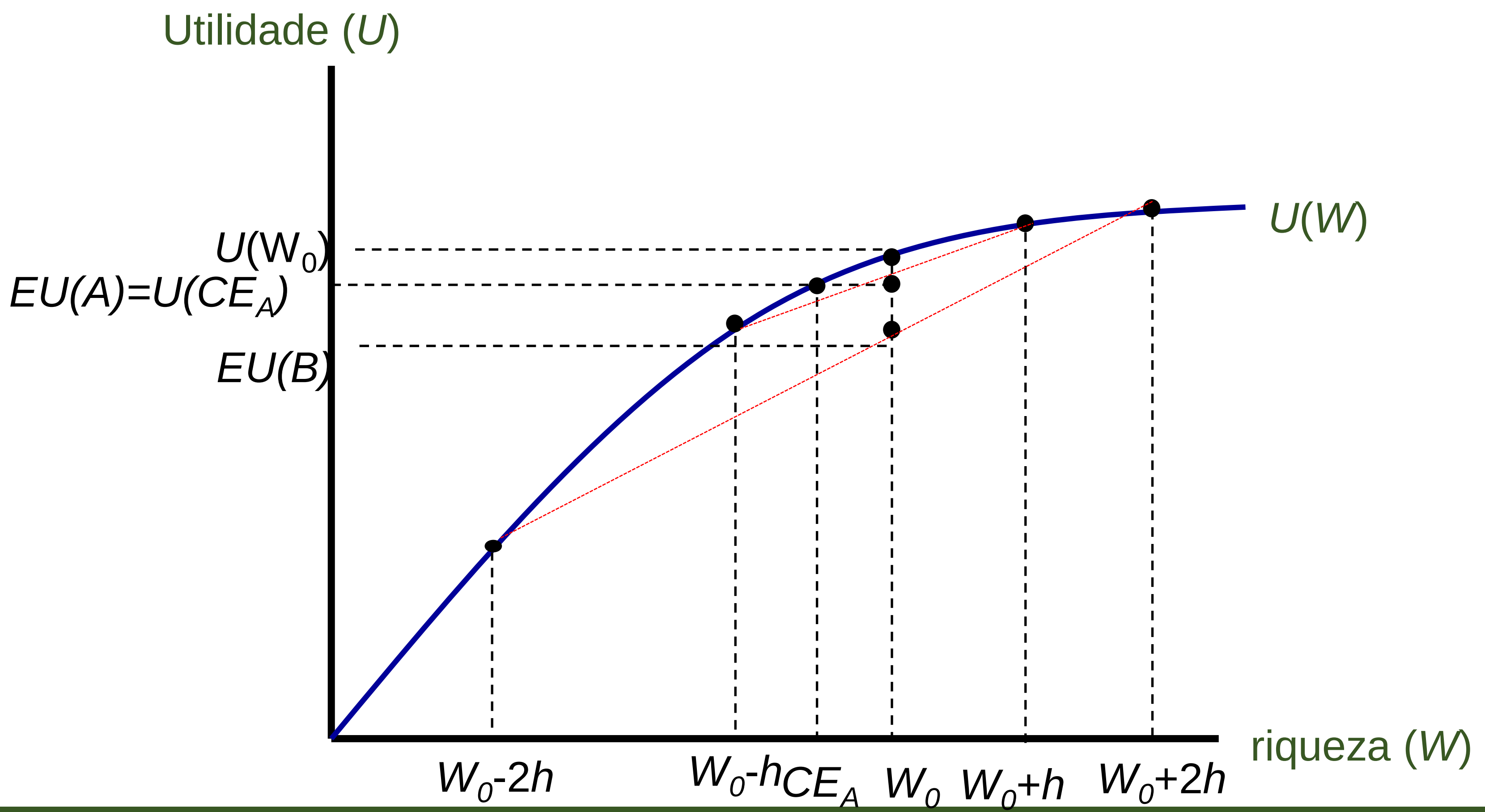
- ✓Utilidade esperada da aposta B - EU(B) = ½ $U(W_0+2h)$ + ½ $U(W_0-2h)$

- ✓Aposta B tem resultado mais favorável em termos de valor do prêmio, mais ambas as apostas fornecem utilidade esperada igual a W_0, e,
- ✓Além disso, $U(W_0) > EU(A) > EU(B)$, assim o indivúduo preferirá manter a riqueza atual.

Aversão ao risco e seguro

- Quanto um indivíduo está disposto a pagar para evitar uma aposta?

Aversão ao Risco



Aversão ao risco e seguro

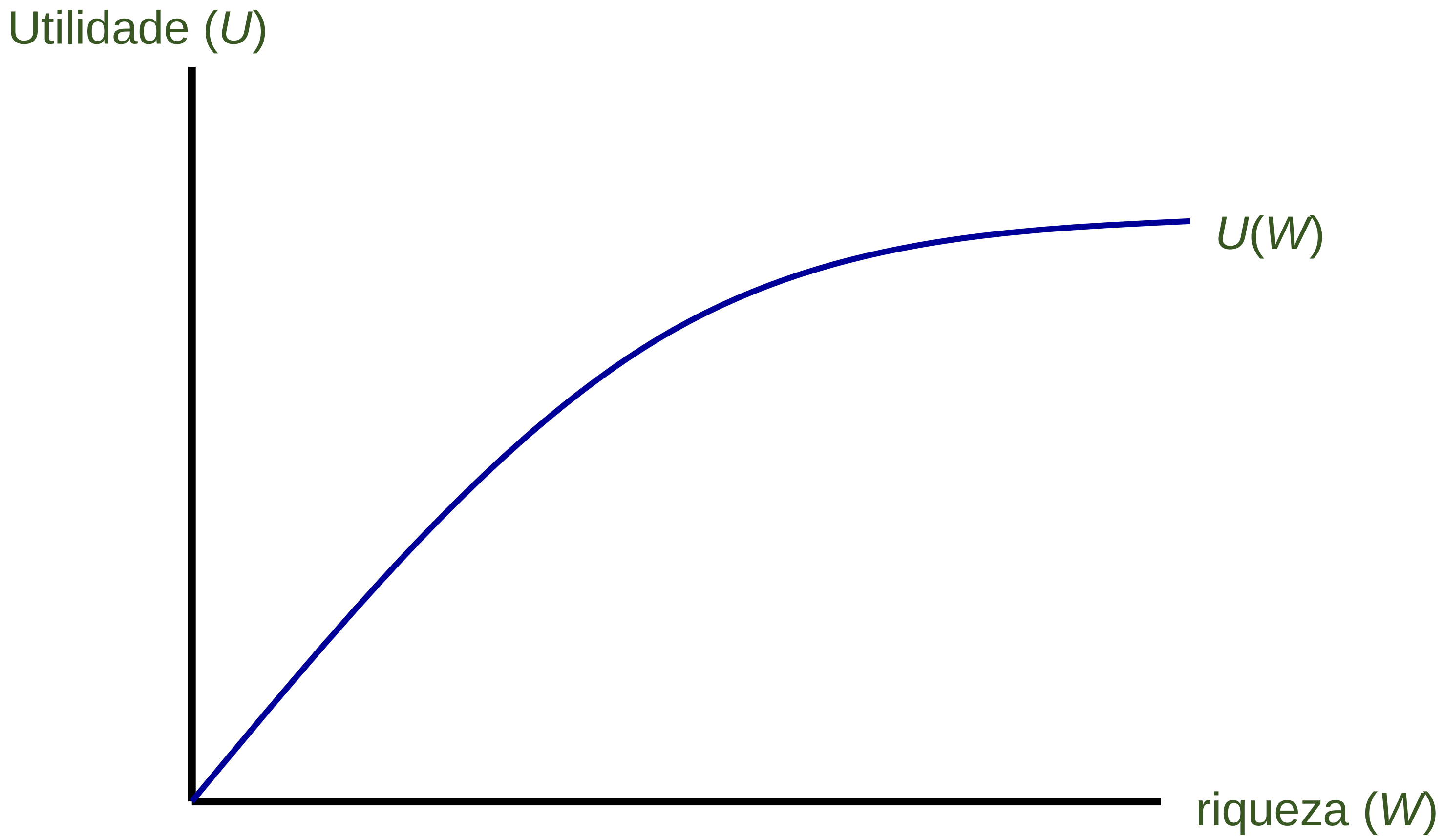
- Quanto um indivíduo está disposto a pagar para evitar uma aposta?

- No Gráfico, CE_A é o equivalente certeza, note que a uma certa riqueza CE_A, o indivíduo obtém a mesma utilidade esperada que obteria participando da aposta A.

- O indivíduo estaria disposto a pagar $W_0 - CE_A$ para evitar a participar da aposta.
- Isso explica porque as pessoas contratam seguro, porque estão dispostas a pagar uma pequena quantidade (prêmio de risco) para evitar situações de risco.

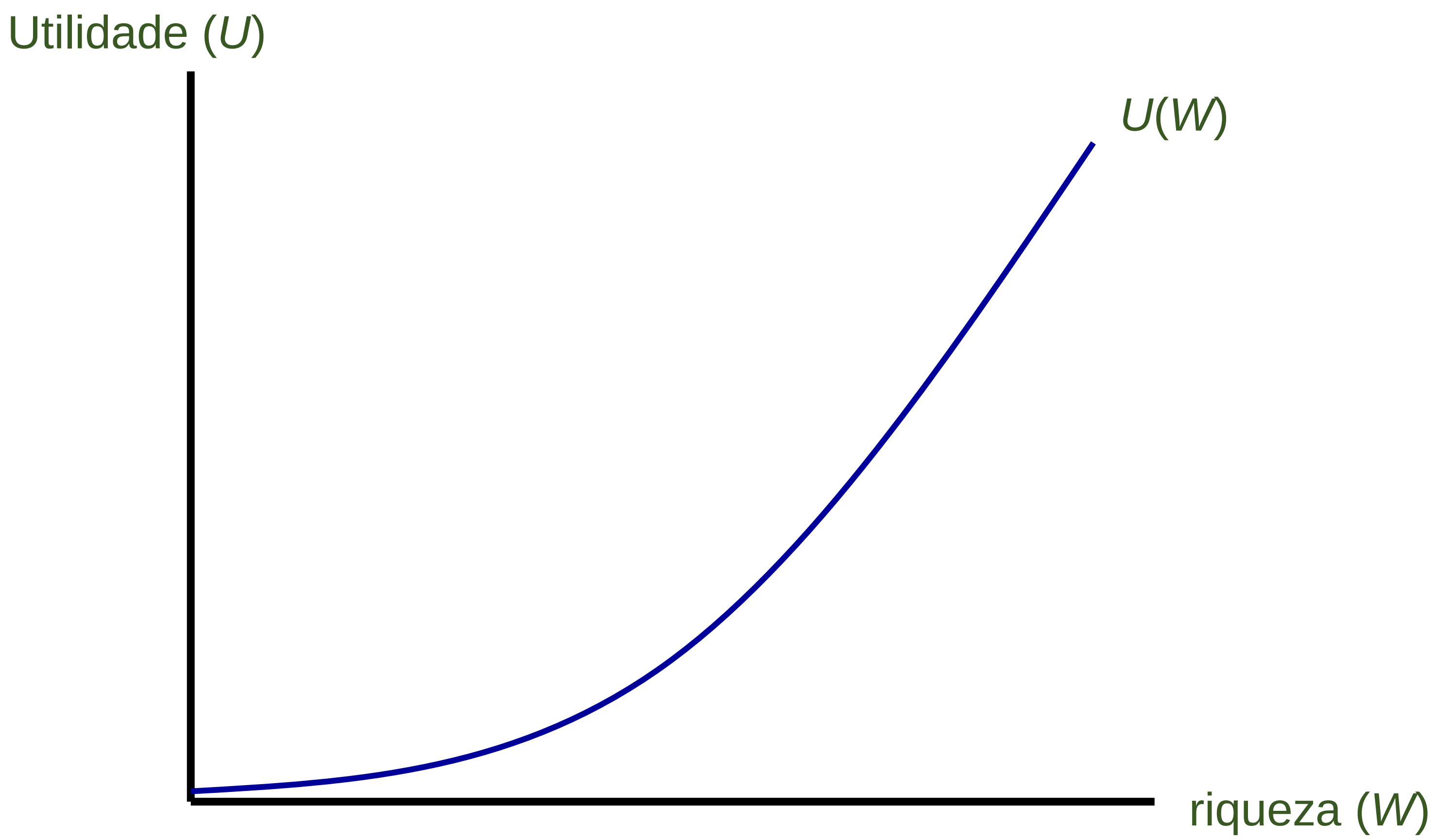
Perfil de Risco

- Avesso ao Risco



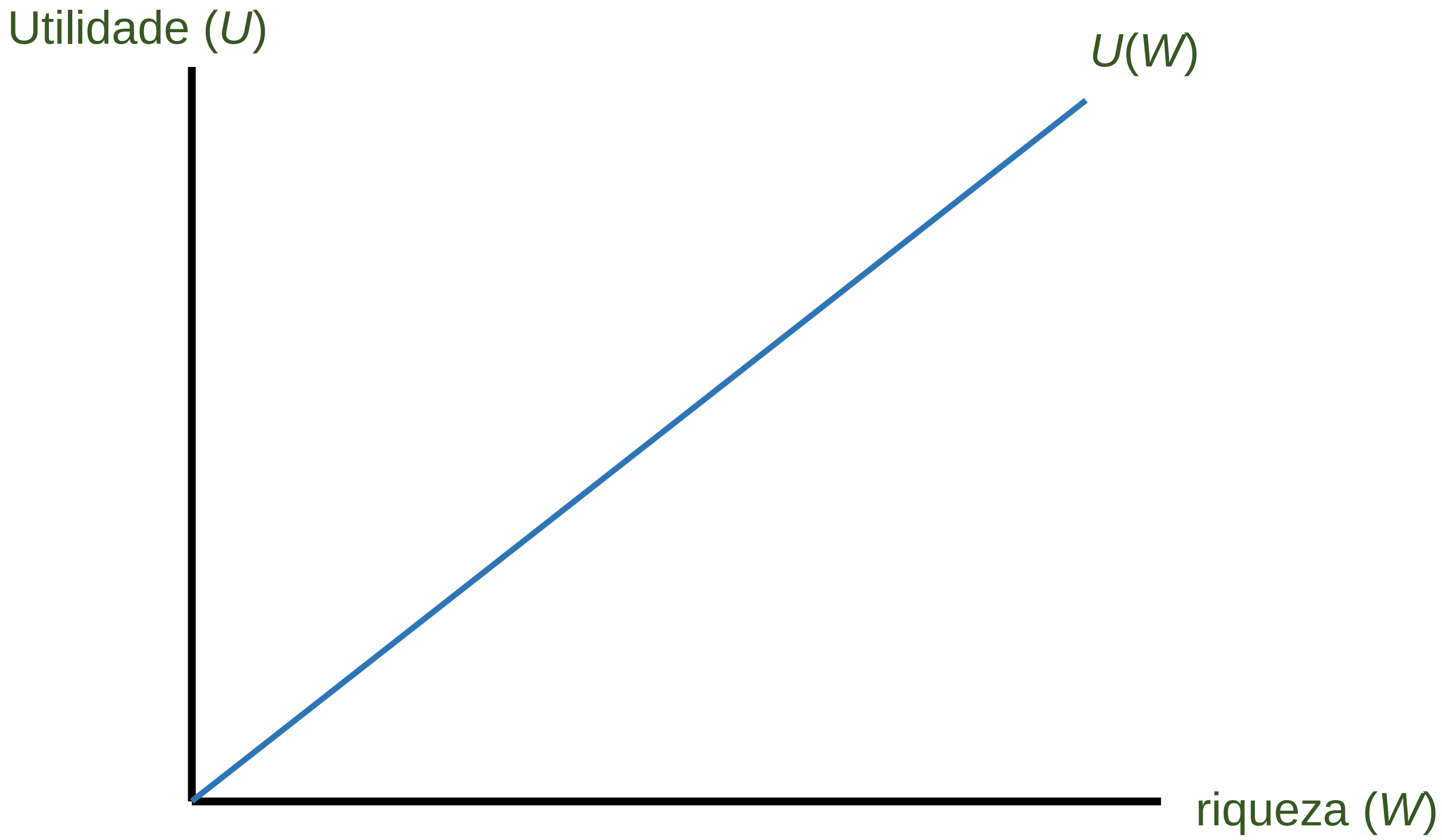
Perfil de Risco

- Propenso ao Risco (amante do risco)



Perfil de Risco

- Risco Neutro



Medidas de aversão ao risco

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

- $r(W)$ é a medida mais conhecida de aversão ao risco - Coeficiente Absoluto de Aversão ao Risco (Pratt ou Arrow-Pratt)

✓Como $U''(W) < 0$, essa medida é sempre positiva.

✓Quanto maior $r(W)$, maior a aversão ao risco

Medidas de aversão ao risco

- Se a Função Utilidade é quadrática: $U(W) = a + bW + cW^2$, onde $b > 0$ e $c < 0$,

✓A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}$$

✓A aversão ao risco cresce com a riqueza

Medidas de aversão ao risco

- Se a Função Utilidade é logarítmica: U(W) = ln (W) e W>0,

✓ A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}$$

✓ A aversão ao risco decresce com a riqueza

Medidas de aversão ao risco

- Se a Função Utilidade é exponencial: U(W) = – e (–AW) = – exp (–AW), onde A é uma constante positiva,

✓A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A$$

✓A aversão ao risco é constante

Medidas de aversão ao risco

- Aversão ao risco e riqueza

- Coeficiente de aversão ao risco Relativo

$$rr(W) = W \frac{U"(W)}{U'(W)}$$

Aversão ao risco e seguro

- Exemplo 7.2
- Suponha que determinado indivíduo tenha uma riqueza de R$ 100.000 dentre os quais há um carro de R$ 20.000. Sua função utilidade é dada por $U = ln(W)$, onde W é sua riqueza. Este carro possui uma probabilidade de 25% de ser roubado. Calcule:

- **Riqueza esperada sem seguro – ou valor esperado da riqueza.**
- **Utilidade esperada sem seguro.**
- **Valor do seguro justo**
- **Preço máximo que este indivíduo está disposto a pagar pelo seguro**

Referências Bibliográficas

- NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 7