



PME3100 Mecânica I



Notas de aula

Dinâmica do Sólido – Parte 5

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

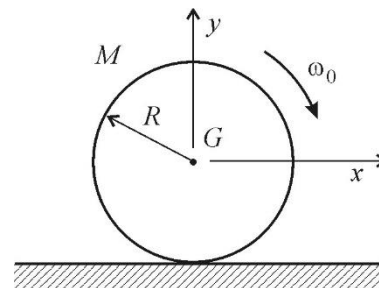
PME3100 Mecânica I

DINÂMICA DO SÓLIDO

Supõe-se um referencial fixo.

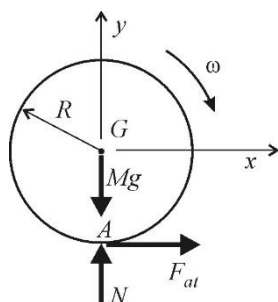
A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

Exemplo 5.6: O disco de raio R e massa M gira com velocidade angular ω_0 quando é largado sobre a superfície plana da figura. Sabendo-se que o disco rola e escorrega durante certo tempo, e a seguir rola sem escorregar, e que o coeficiente de atrito entre o disco e o plano é μ , determine o intervalo de tempo durante o qual existe escorregamento, despreze o atrito de rolamento.



Resolução:

Isolando o disco:



$$\text{TR: } Ma_G \vec{l} = F_{at} \vec{l} + (N - Mg) \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ma_G = F_{at} & (1) \\ N = Mg & (2) \end{cases}$$

$$\text{TQMA, polo G: } \vec{H}_G = -\omega J_G \vec{k} = -\omega \frac{MR^2}{2} \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -\dot{\omega} \frac{MR^2}{2} \vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = F_{at} R \vec{k} \Rightarrow -\dot{\omega} \frac{MR}{2} = F_{at} \quad (3)$$

Lei de Coulomb: enquanto escorregar, com (1) e (2):

$$F_{at} = \mu N \Rightarrow Ma_G = \mu Mg \Rightarrow a_G = \mu g = cte \Rightarrow v_G = \mu g t \quad (4)$$

$$\text{Usando } F_{at} = \mu N = \mu Mg \text{ em (3): } -\dot{\omega} \frac{MR}{2} = \mu Mg \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{2\mu g}{R} = cte \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t \quad (5)$$

$$\text{Poisson: } \vec{v}_G = v_G \vec{l} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = v_A \vec{l} - \omega \vec{k} \wedge (R \vec{j}) = (v_A + \omega R) \vec{l} \Rightarrow$$

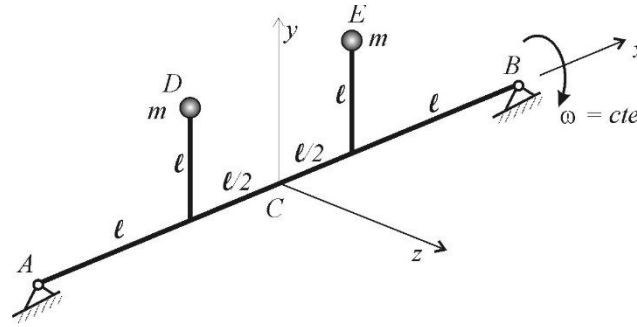
$$\Rightarrow v_G = v_A + \omega R \quad (6)$$

Substituindo (4) e (5) em (6):

$$\mu g t = v_A + \omega_0 R - 2\mu g t \Rightarrow t = \frac{v_A + \omega_0 R}{3\mu g}$$

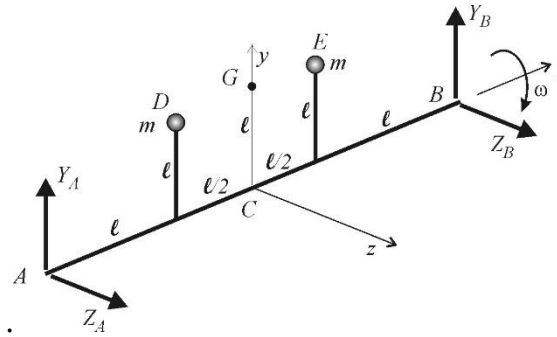
O disco para de escorregar no instante em que $v_A = 0$. Assim: $t^* = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$

Exemplo 5.7: Desbalanceamento estático: na figura, o sistema (C, x, y, z) gira com o eixo, com rotação ω constante. O eixo e as barras têm massa desprezível. Determine as reação nos mancais A e B.



Resolução:

Note-se que, neste caso, o centro de massa G está fora do eixo, constituindo o caso de **desbalanceamento estático**, no qual há apenas uma posição de equilíbrio estável, com as massas D e E na posição mais inferior.



$$\text{TR: } 2m\vec{a}_G = (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A + Z_B)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} 2ma_{Gy} = Y_A + Y_B & (1) \\ 2ma_{Gz} = Z_A + Z_B & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{TQMA, polo C: } \vec{H}_C &= m(\vec{G} - \vec{C}) \wedge \vec{v}_C + (J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\vec{i} + \\ &+ (-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z)\vec{k} = \\ &= J_x\omega_x\vec{i} - J_{yx}\omega_x\vec{j} - J_{zx}\omega_x\vec{k} \end{aligned}$$

Temos:

$$J_x = J_{xD} + J_{xE} = ml^2 + ml^2 = 2ml^2$$

$$J_{yx} = J_{yxD} + J_{yxE} = ml\left(-\frac{l}{2}\right) + ml\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$J_{zx} = J_{zxD} + J_{zxE} = m \cdot 0 \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) + m \cdot 0 \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\text{Assim: } \vec{H}_C = 2ml^2\omega\vec{i} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_C = 2ml^2\dot{\omega}\vec{i} + 2ml^2\omega\dot{\vec{i}} = \vec{0} + 2ml^2\omega(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) = \vec{0}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_C &= \vec{0} = 2m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_C + \vec{M}_C^{\text{ext}} = \vec{0} + (A - C) \wedge (Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + (B - C) \wedge (Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}) = \\ &= \left(-\frac{3l}{2}\vec{i}\right) \wedge (Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + \left(\frac{3l}{2}\vec{i}\right) \wedge (Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}) = \\ &= \frac{3l}{2}(Z_A - Z_B)\vec{j} - \frac{3l}{2}(Y_A - Y_B)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} Y_A = Y_B & (3) \\ Z_A = Z_B & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Cinemática:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{C}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{C})] = -\omega^2 L\vec{j}$$

Substituindo em (1) e (2):

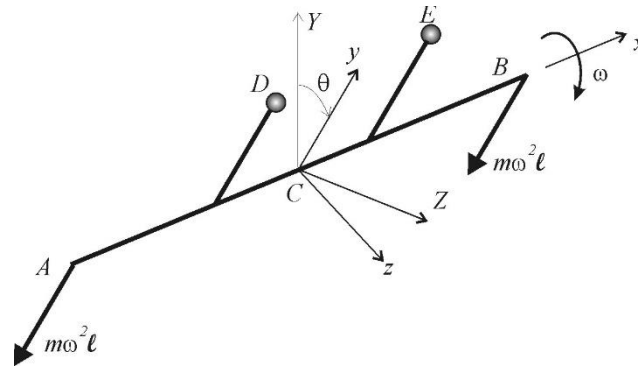
$$-2m\omega^2 L = Y_A + Y_B \quad (1a)$$

$$Z_A = -Z_B \quad (2a)$$

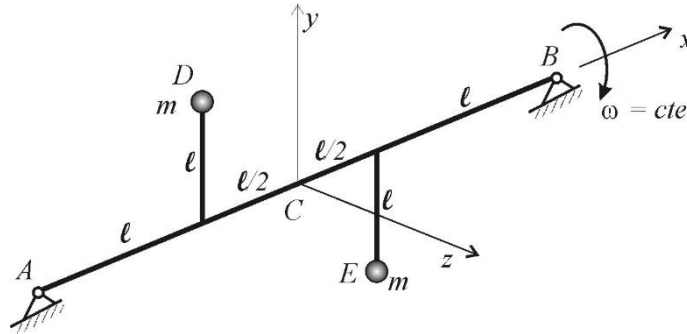
De (1a) e (3): $Y_A = Y_B = -m\omega^2 L$

De (2a) e (4): $Z_A = Z_B = 0$

Usando um sistema de coordenadas (C, X, Y, Z) fixo, vemos que existem forças de desbalanceamento de módulo $m\omega^2 L$ girantes iguais nos mancais A e B , respectivamente, gerando componentes verticais e horizontais alternadas iguais.

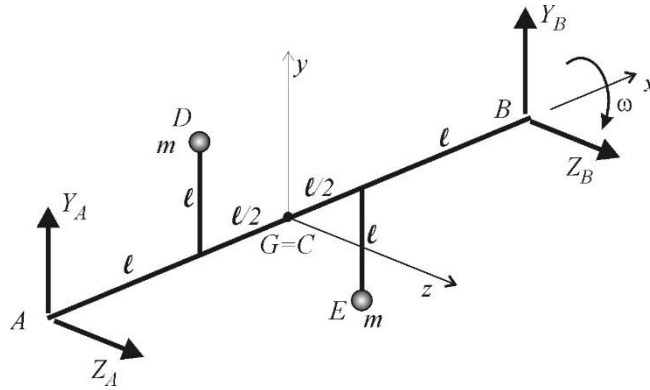


Exemplo 5.8: Desbalanceamento dinâmico: na figura, o sistema (C, x, y, z) gira com o eixo, com rotação ω constante. O eixo e as barras têm massa desprezível. Determine as reação nos mancais A e B.



Resolução:

Note-se que, neste caso, o centro de massa G coincide com o ponto C sobre o eixo, estando o sistema **estaticamente balanceado** (qualquer posição é de equilíbrio estável).



$$\text{TR: } 2m\vec{a}_G = \vec{0} = (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A + Z_B)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} Y_A + Y_B = 0 & (1) \\ Z_A + Z_B = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{TQMA, polo C: } \vec{H}_C &= m(\vec{G} - \vec{C}) \wedge \vec{v}_C + (J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\vec{i} + \\ &+ (-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z)\vec{k} = \\ &= J_x\omega_x\vec{i} - J_{yx}\omega_x\vec{j} - J_{zx}\omega_x\vec{k} \end{aligned}$$

Temos:

$$J_x = J_{xD} + J_{xE} = ml^2 + ml^2 = 2ml^2$$

$$J_{yx} = J_{yxD} + J_{yx E} = ml\left(-\frac{l}{2}\right) + m(-l)\left(\frac{l}{2}\right) = -ml^2$$

$$J_{zx} = J_{zxD} + J_{zx E} = m \cdot 0 \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) + m \cdot 0 \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Assim: } \vec{H}_C &= 2ml^2\omega\vec{i} + ml^2\omega\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_C = 2ml^2\dot{\omega}\vec{i} + 2ml^2\omega\dot{\vec{i}} + ml^2\dot{\omega}\vec{j} + ml^2\omega\dot{\vec{j}} = \vec{0} + \\ &+ 2ml^2\omega(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + \vec{0} + ml^2\omega(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) = ml^2\omega^2\vec{k} \end{aligned}$$

Portanto:

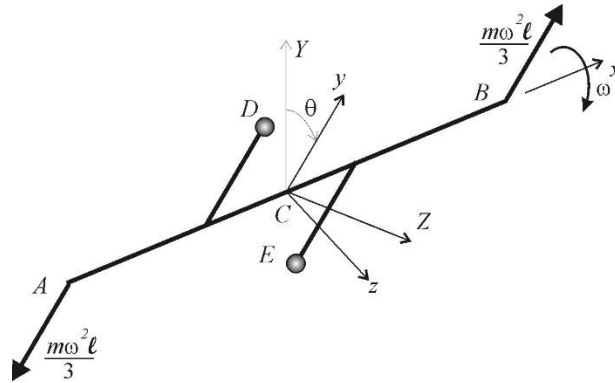
$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_C &= ml^2\omega^2\vec{k} = \vec{0} + \vec{M}_C^{\text{ext}} = \\ &= \vec{0} + (\vec{A} - \vec{C}) \wedge (Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + (\vec{B} - \vec{C}) \wedge (Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}) = \\ &= \left(-\frac{3l}{2}\vec{i}\right) \wedge (Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + \left(\frac{3l}{2}\vec{i}\right) \wedge (Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3l}{2}(Z_A - Z_B)\vec{j} - \frac{3l}{2}(Y_A - Y_B)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} Y_B - Y_A = \frac{2ml\omega^2}{3} & (3) \\ Z_A = Z_B & (4) \end{cases}$$

De (1) e (3): $Y_A = -Y_B = -\frac{m\omega^2 L}{3}$

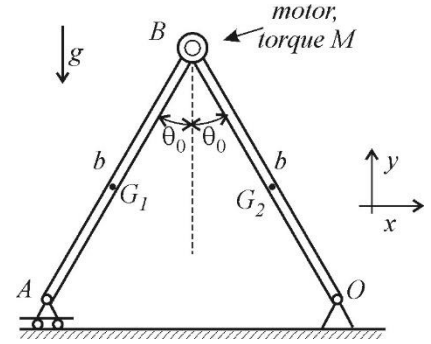
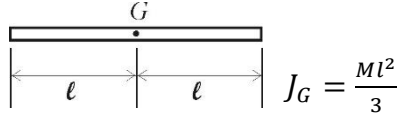
De (2) e (4): $Z_A = Z_B = 0$

Da mesma forma anterior, usando um sistema de coordenadas (C, X, Y, Z) fixo, vemos que existem forças de desbalanceamento de módulo $m\omega^2 L$ girantes opostas nos mancais A e B , respectivamente, gerando componentes verticais e horizontais alternadas opostas. É o caso de desbalanceamento dinâmico.



Exemplo 5.9: As duas barras homogêneas, de peso mg e comprimento b , movem-se num plano vertical. Na extremidade B da barra AB , há um pequeno motor elétrico que aplica um momento (binário) M constante na extremidade B da barra BO , fazendo esta girar em torno de O no sentido horário. As barras partem do repouso, da posição indicada na figura. Determine a velocidade do ponto A no instante em que ele coincide com o ponto O .

Dados:



Resolução:

Trabalho:

Barra AB:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_{FA} + \tau_{FB} + \tau_{peso} + \tau_M = \\ &= 0 + \left(\int_0^{b \sin \theta_0} X_B dx + \int_{b \cos \theta_0}^b Y_B dy \right) + (-mg)\Delta y_{G_1} + M\theta_0\end{aligned}$$

Barra BO:

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tau_{FB} + \tau_{FO} + \tau_{peso} + \tau_M = \\ &= \left(\int_0^{b \sin \theta_0} (-X_B) dx + \int_{b \cos \theta_0}^b (-Y_B) dy \right) + 0 + (-mg)\Delta y_{G_2} + M\theta_0\end{aligned}$$

Obtemos:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 2M\theta_0 - mgb(1 - \cos \theta_0)$$

Variação da energia cinética (partiu do repouso):

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}J_{G_2}\omega_2^2$$

$$\text{Temos: } J_{G_1} = J_{G_2} = \frac{mb^2}{12}$$

Na posição final:

$$\vec{v}_{G_1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge (G_1 - A) = v_A \vec{i} + \omega_1 \vec{k} \wedge \frac{b}{2} \vec{j} = \left(v_A - \frac{\omega_1 b}{2} \right) \vec{i} \quad (A)$$

$$\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (G_2 - O) = \omega_2 \vec{k} \wedge \frac{b}{2} \vec{j} = -\frac{\omega_2 b}{2} \vec{i} \quad (B)$$

Para um instante qualquer:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge (B - A) = \vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (B - O) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_A \vec{i} + \omega_1 \vec{k} \wedge b(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \omega_2 \vec{k} \wedge b(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (v_A - \omega_1 b \cos \theta) \vec{i} + \omega_1 b \sin \theta \vec{j} = -\omega_2 b \cos \theta \vec{i} - \omega_2 b \sin \theta \vec{j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 b \sin \theta = -\omega_2 b \sin \theta \Rightarrow \omega_1 = -\omega_2 = \omega \\ v_A - \omega_1 b \cos \theta = -\omega_2 b \cos \theta \Rightarrow v_A = 2\omega b \cos \theta \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Em } \theta = 0: v_A = 2\omega b \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{2b}$$

$$\text{Portanto, de (A) e (B): } \vec{v}_{G_1} = \frac{3v_A}{4} \vec{i} \text{ e } \vec{v}_{G_2} = \frac{v_A}{4} \vec{i}$$

Assim:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(\frac{3v_A}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mb^2}{12} \left(\frac{v_A}{2b} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v_A}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mb^2}{12} \left(-\frac{v_A}{2b} \right)^2 = \frac{mv_A^2}{3}$$

TEC para o sistema: $\Delta T = \tau \Rightarrow$

$$\frac{mv_A^2}{3} = 2M\theta_0 - mgb(1 - \cos \theta_0) \Rightarrow v_A^2 = \frac{3[2M\theta_0 - mgb(1 - \cos \theta_0)]}{m}$$

Note-se que, necessariamente, $M \geq \frac{mgb(1 - \cos \theta_0)}{2\theta_0}$