ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

# PME3100 Mecânica I

## Notas de aula

# Dinâmica do Sólido – Parte 4

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

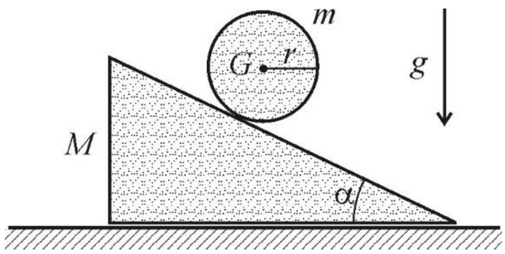
**DINÂMICA DO SÓLIDO**

Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

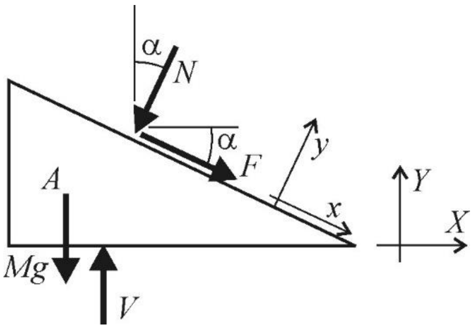
---

**<u>Exemplo 5.3</u>**: Um disco homogêneo, de massa $m$ e raio $R$, rola sem escorregar sobre o prisma de massa $M$, que forma um ângulo $\alpha$ com o plano horizontal, como mostra a figura. Supondo que não exista atrito entre o prisma e o plano horizontal em que o prisma se apoia, determine a aceleração do prisma e a força normal que o disco exerce sobre o prisma.




*Resolução:*

<u>Prisma</u>:



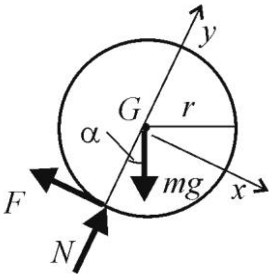

TR: $M\vec{a}_A = Ma_A\vec{I} = (F\cos\alpha - N\sin\alpha)\vec{I} +$

$+(V - Mg - N\cos\alpha - F\sin\alpha)\vec{J} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ Ma_A = F\cos\alpha - N\sin\alpha \qquad (1)$$

TMA → envolve o ponto de aplicação de $V$.

<u>Disco</u>:




TR: $m\vec{a}_G = (mg\sin\alpha - F)\vec{\imath} + (N - mg\cos\alpha)\vec{\jmath}$ (A)

TQMA, polo G: $\vec{H}_G = \omega J_G\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \dot{\omega}\frac{mr^2}{2}\vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = -Fr\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\omega}\frac{mr}{2} = -F \qquad (2)$$

Temos 4 incógnitas: $a_A, F, N$ e $\dot{\omega}$.

Cinemática: composição de movimentos; referencial móvel – prisma

$\vec{v}_{G,r} = -\omega r\vec{\imath} \Rightarrow \vec{a}_{G,r} = -\dot{\omega}r\vec{\imath}$

$\vec{v}_{G,a} = v_A\vec{I} \Rightarrow \vec{a}_{G,a} = a_A\vec{I} = a_A(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$

$\vec{a}_{G,c} = \vec{0}$ (rotação nula do referencial móvel)

Portanto: $\vec{a}_G = \vec{a}_{G,r} + \vec{a}_{G,a} + \vec{a}_{G,c} = (-\dot{\omega}r + a_A\cos\alpha)\vec{\imath} + a_A\sin\alpha\,\vec{\jmath}$

Substituindo em (A):

$$mg\sin\alpha - F = -m\dot{\omega}r + ma_A\cos\alpha \qquad (3)$$

$$N - mg\cos\alpha = ma_A\sin\alpha \qquad (4)$$

Substituindo $F$ de (2) em (1) e (3):

$$Ma_A = -\dot{\omega}\frac{mr}{2}\cos\alpha - N\sin\alpha \qquad (1A)$$

$$g\sin\alpha + \dot{\omega}\frac{r}{2} = -\dot{\omega}r + a_A\cos\alpha \Rightarrow \dot{\omega}r = \frac{2}{3}(a_A\cos\alpha - g\sin\alpha) \qquad (3A)$$

Substituindo em (1A):

$$Ma_A = -m\cos\alpha\,(a_A\cos\alpha - g\sin\alpha) - N\sin\alpha \qquad (1B)$$

De (4): $N = m(a_A\sin\alpha + g\cos\alpha)$

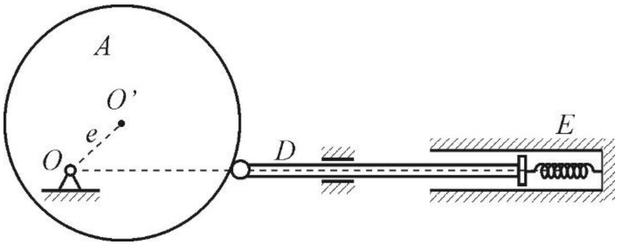
Substituindo em (1B):

$$\boldsymbol{a_A = -\frac{mg\sin 2\alpha}{m(1 + 2\sin^2\alpha) + 3M}}$$

e

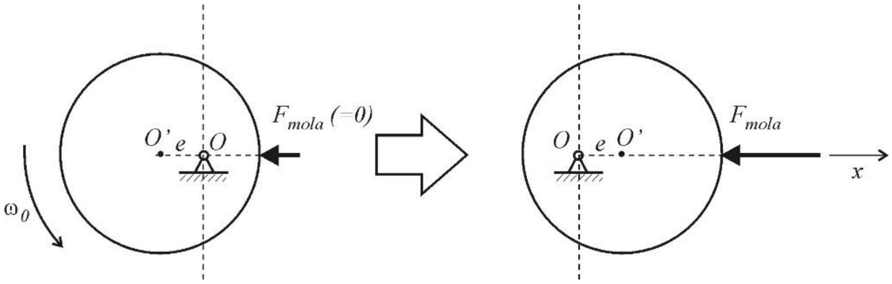
$$\boldsymbol{N = \frac{m(m + 3M)g\cos\alpha}{m(1 + 2\sin^2\alpha) + 3M}}$$

**Exemplo 5.4**: A figura mostra um mecanismo excêntrico que se move num plano horizontal. O excêntrico *A* faz com que o rolete *B* e a barra *D* tenham um movimento alternativo de translação. A mola *E*, ligada à barra, faz com que o rolete esteja sempre em contato com o excêntrico. O peso do excêntrico é *P* e sua excentricidade é igual à metade do seu raio. A constante de da mola *E* tem valor *k*. Quando o rolete esta na sua posição extrema à esquerda, a mola não está comprimida. Qual a mínima velocidade angular nesta posição, para que a barra atinja a posição extrema à direita? Despreze as massas do rolete, da barra e da mola. Considere o excêntrico como um disco homogêneo.




*Resolução:*

Trabalho das forças externas (mola; plano horizontal → peso não realiza trabalho):




$$\tau_{mola} = \int_0^{2e} F_{mola}dx = \int_0^{2e} (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_0^{2e} = -2ke^2$$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_{O'}^2 + \frac{1}{2}J_z\omega^2 = \frac{Pv_{O'}^2}{2g} + \frac{1}{2}\frac{Pr^2}{2g}\omega^2 = \frac{Pv_{O'}^2}{2g} + \frac{P\omega^2e^2}{g}$$

Como $v_{O'} = \omega e$, temos:

$$T = \frac{3P\omega^2e^2}{2g}$$

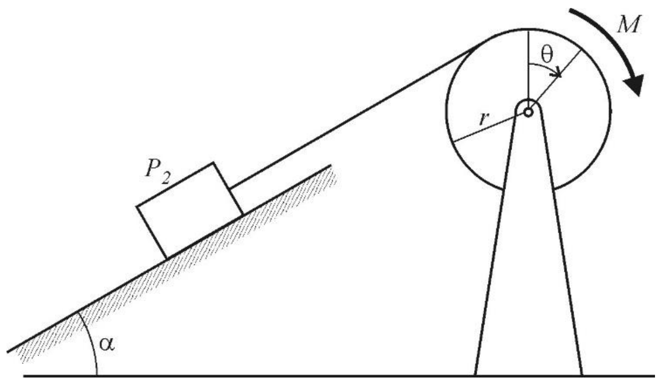
Na situação desejada, o excêntrico estará parado na posição final. Assim:

$$\Delta T = -\frac{3P\omega_0^2e^2}{2g}$$

TEC: $-2ke^2 = -\frac{3P\omega_0^2e^2}{2g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{4kg}}{\boldsymbol{3P}}}$$

**Exemplo 5.5**: Um binário de momento constante $M$ é aplicado ao cilindro homogêneo de peso $P_1$ e raio $r$, conforme a figura. O cabo, de preso desprezível, tem uma extremidade presa ao corpo de peso $P_2$ e a outra presa ao cilindro no qual se enrola. O coeficiente de atrito entre o corpo $P_2$ e o plano é $\mu$. Admita que o sistema parte do repouso e que o movimento se dá num plano vertical, com $P_2$ subindo. Sendo θ o ângulo de rotação do cilindro, calcule a velocidade angular do mesmo em função de $\theta$ e das constantes dadas.




*Resolução:*

Sistema: cilindro + bloco

Trabalho: as forças internas (força no cabo) não realizam trabalho.

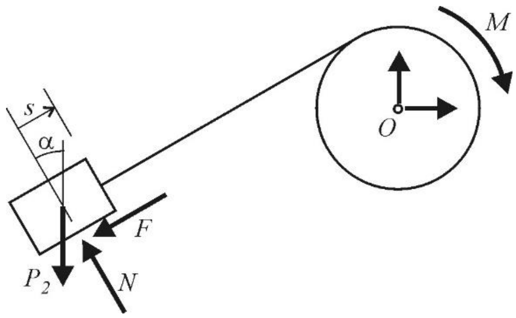
Trabalho dos esforços externos: realizam trabalho $F, P_2$ e $M$.

$$\tau_F = -F(s - s_0) = -Fr(\theta - \theta_0) = -Fr\theta \text{ (supondo } \theta_0 = 0)$$

$$\tau_{P_2} = -P_2 \sin\alpha\,(s - s_0) = -P_2 r\theta \sin\alpha$$

$$\tau_M = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = M(\theta - \theta_0) = M\theta$$

$$\tau_{ext} = [M - (P_2 \sin\alpha + F)r]\theta$$




Variação de energia cinética (partiu do repouso):

$$\Delta T = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}v_2^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 =$$

$$= \frac{P_2}{2g}r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{P_1}{2g}r^2\omega^2 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}\left(P_2 + \frac{P_1}{2}\right)$$

Aplicando o TEC:

$$[M - (P_2 \sin\alpha + F)r]\theta = \frac{\omega^2 r^2}{2g}\left(P_2 + \frac{P_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4g[M - (P_2 \sin\alpha + F)r]}{r^2(2P_2 + P_1)}\theta$$

Ainda:

TR para o bloco: $N = P_2 \cos\alpha$

Lei de Coulomb, <u>bloco subindo</u>: $F = \mu N = \mu P_2 \cos\alpha$

Temos:

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega^2} = \frac{[M - P_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)r]4g}{r^2(2P_2 + P_1)}\boldsymbol{\theta}$$

***<u>DESAFIO: Como será o movimento do bloco, para diferentes valores de M? Que valores são esses?</u>***