



PME3100 Mecânica I



Notas de aula

Dinâmica do Sólido – Parte 2

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

4. Teorema da Energia Cinética (TEC)

A energia cinética de um sistema de pontos materiais P_i é a soma das energias cinéticas de cada ponto:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i) = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{int} \cdot \vec{v}_i$$

Para as forças internas, já vimos que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i^{int} &= \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int} \\ \vec{F}_{ij}^{int} &= \lambda_{ij} (P_j - P_i) \text{ e} \\ \vec{F}_{ji}^{int} &= -\lambda_{ij} (P_j - P_i) \end{aligned}$$

Assim:

$$\dot{T} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i$$

Multiplicando por dt e integrando de 0 a t :

$$\int_0^t \dot{T} dt = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \int_0^t \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i dt$$

Sendo O um ponto fixo:

$$\vec{v}_i dt = \frac{d(P_i - O)}{dt} dt = d(P_i - O) = dP_i$$

Portanto:

$$T(t) - T(0) = \int_{P(0)}^{P(t)} \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot dP_i + \int_{P(0)}^{P(t)} \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot dP_i$$

A primeira integral é o trabalho das forças externas de 0 a t , sobre seus respectivos pontos de aplicação.

Na dupla somatória, sempre que aparecer o termo $\vec{F}_{ij}^{int} \cdot dP_i = \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot dP_i$, aparecerá também o termo $\vec{F}_{ji}^{int} \cdot dP_j = -\lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot dP_j$.

Somando os dois:

$$\vec{F}_{ij}^{int} \cdot dP_i + \vec{F}_{ji}^{int} \cdot dP_j = -\lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot d(P_j - P_i)$$

No caso de **corpos rígidos**, as distâncias $(P_j - P_i)$ entre seus pontos não variam, o que implica em:

$$(P_j - P_i) \cdot d(P_j - P_i) = 0$$

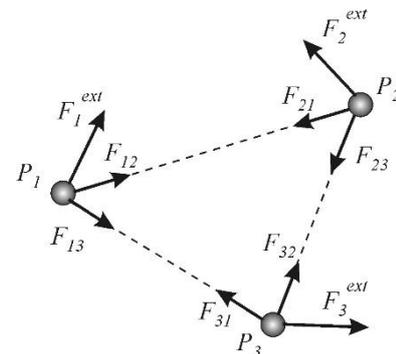
ou seja, *no caso de corpos rígidos as forças internas não realizam trabalho*.

Portanto, podemos afirmar que:

“A variação da energia cinética de um sólido é igual ao trabalho realizado pelas forças externas”:

$$\Delta T = \tau_{ext}$$

Este é o **Teorema da Energia Cinética**.



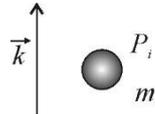
4.1 Exemplos de cálculo de trabalho

a) Trabalho da força peso

Suponhamos que o versor \vec{k} represente a vertical ascendente e seja g a aceleração da gravidade.

Cada partícula P_i está sujeita a uma força:

$$\vec{F}_i^{ext} = -m_i g \vec{k}$$



O deslocamento elementar dP_i , em termos de suas componentes, será:

$$dP_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k}$$

O trabalho elementar da força será o produto escalar:

$$d\tau_i = \vec{F}_i^{ext} \cdot dP_i = -m_i g dz_i$$

Integrando no tempo, entre os instantes t_0 e t , o trabalho realizado por \vec{F}_i^{ext} será:

$$\Delta\tau_i = -m_i g [z_i(t) - z_i(t_0)]$$

Estendendo a todas as partículas do sistema:

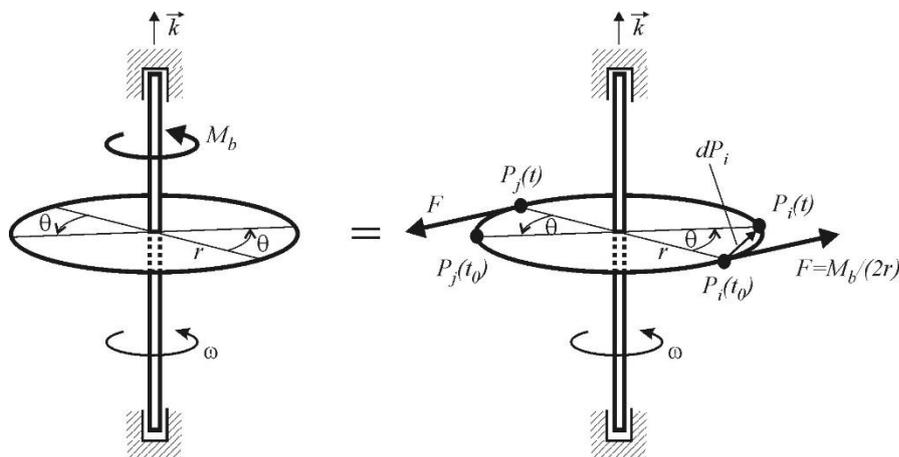
$$\Delta\tau = \sum_i \Delta\tau_i = g \sum_i m_i [z_i(t_0) - z_i(t)]$$

Pela definição do centro de massa G (ou baricentro, neste caso): $\sum_i m_i z_i = m z_G$

Portanto:

$$\Delta\tau = \tau(t_0, t) = m g [z_G(t_0) - z_G(t)]$$

b) Trabalho de um binário



No caso da figura, o binário \vec{M}_b pode ser substituído por $2rF\vec{k}$, onde $F = |\vec{M}_b|/(2r)$ é o módulo do par de forças opostas \vec{F} , agindo no mesmo disco como mostrado. O trabalho do binário será o trabalho das forças \vec{F} :

$$d\tau_b = F|dP_i| + F|dP_j| = 2Fr d\theta = M_b d\theta$$

Mas $d\theta = \omega dt$; portanto:

$$d\tau_b = M_b \omega dt$$

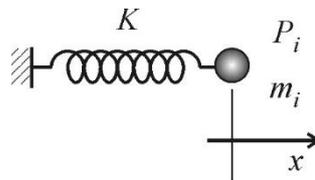
Assim:

$$\tau_b(t_0, t) = \int_{t_0}^t M_b \omega dt = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} M_b d\theta$$

No caso geral:

$$\tau_b(t_0, t) = \int_{t_0}^t \vec{M}_b \cdot \vec{\omega} dt$$

c) Trabalho de força elástica



A força elástica que a mola exerce sobre o ponto P_i é:

$$F_i = -Kx$$

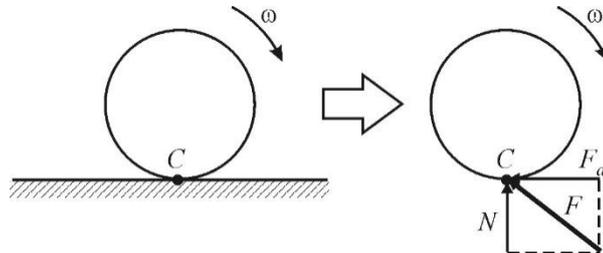
Para um deslocamento dx do ponto, essa força realiza o trabalho:

$$d\tau = F_i dx = -Kx dx$$

Entre duas posições x_0 e x , o trabalho realizado será:

$$\tau(x_0, x) = \int_{x_0}^x -Kx dx \Rightarrow \tau(x_0, x) = \frac{K(x_0^2 - x^2)}{2}$$

d) Trabalho das forças de contato em rolamento puro (sem escorregar)



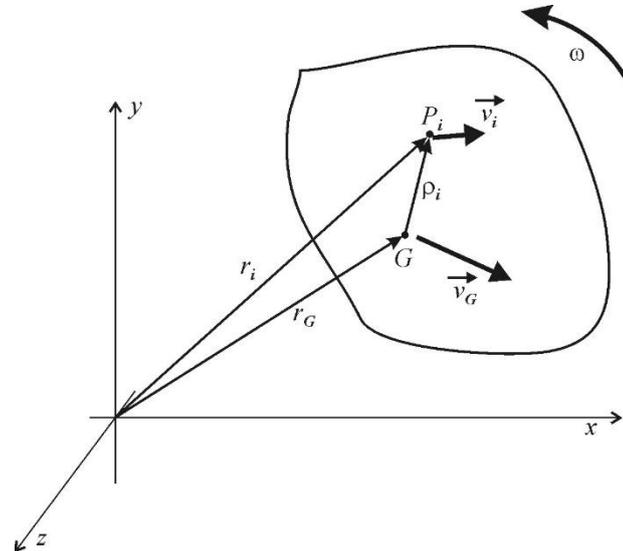
Não havendo escorregamento, no instante em que a força de reação do solo F é aplicada no ponto C , a velocidade deste é nula; portanto:

$$d\tau = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}_C}_{\vec{0}} dt = 0$$

4.2 Cálculo da energia cinética de um sólido

Seja $\vec{\omega}$ o vetor rotação de um sólido, \vec{v}_i a velocidade de um de seus pontos P_i e \vec{v}_G a velocidade do seu centro de massa G num instante qualquer. Sendo m_i a massa de P_i , a energia cinética total do sólido é:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



Usando o centro de massa G do sistema, temos:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{\rho}_i$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

Portanto: $v_i^2 = v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\rho}_i^2$

Assim:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

Mas: $\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_G$

Como $\sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$, este termo é nulo, e ficamos com:

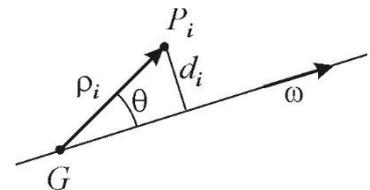
$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

Como estamos tratando de um sólido, a distância de qualquer de seus pontos ao centro de massa é sempre a mesma, ou seja:

$$|\vec{\rho}_i| = \text{cte}$$

Portanto:

$\dot{\rho}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i \Rightarrow \dot{\rho}_i^2 = (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i)^2 = (|\vec{\omega}| |\vec{\rho}_i| \sin \theta_i)^2 = \omega^2 d_i^2$
 com $d_i =$ distância do ponto P_i à reta que contém G e é paralela a $\vec{\omega}$.



Assim sendo, temos:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 d_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_{G\omega}$$

com $J_{G\omega} =$ momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo a $\vec{\omega}$ que passa por G .

Finalmente, a energia cinética total de um sólido será:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G\omega} \omega^2$$

Como já vimos, o movimento qualquer de um sólido pode ser considerado como a superposição de um movimento de translação com outro de rotação. Esta expressão da energia cinética ressalta isso: a primeira parcela ($\frac{1}{2} m v_G^2$) refere-se ao movimento de translação, e a segunda ($\frac{1}{2} J_{G\omega} \omega^2$) ao de rotação.

NOTA: Se ao invés de usar o centro de massa G , tivéssemos usado um ponto A qualquer do sólido, a expressão da energia cinética seria:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (G - A) + \frac{1}{2} J_{A\omega} \omega^2$$

com $J_{A\omega}$ = momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo a $\vec{\omega}$ que passa por A .

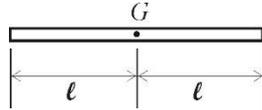
No caso em que o ponto A tenha velocidade nula:

$$T = \frac{1}{2} J_{A\omega} \omega^2$$

Exemplo 4.1: A barra AB , homogênea de comprimento 2ℓ e massa M , tem a extremidade A apoiada no plano horizontal e a extremidade B presa pelo fio BC , formando um ângulo $\alpha_0 = 30^\circ$ com a horizontal. O atrito entre a barra e o plano é desprezível. Se o fio BC é cortado, calcule:

- a) a velocidade e a aceleração angulares da barra em uma posição genérica;
- b) a velocidade angular da barra quando está prestes a se chocar com o plano horizontal.

Dados:



$$J_G = \frac{Ml^2}{3}$$

Resolução:

- a) Isolemos a barra em uma posição genérica, após o corte do fio:

Relacionemos v_G com ω ; por Poisson:

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_G \vec{j} &= v_A \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge l(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) = \\ &= (v_A - \omega l \sin \alpha) \vec{i} + \omega l \cos \alpha \vec{j} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_G &= \omega l \cos \alpha \end{aligned}$$

Aplicamos o TEC:

$$\Delta T = \tau^{ext}$$

A variação de energia cinética será:

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{1}{2} M v_{G_0}^2 + \frac{1}{2} J_G \omega_0^2 = 0 \text{ (repouso)} \\ T(t) &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 \\ \Delta T &= T(t) - T(0) = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \omega^2 l^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \omega^2 = \frac{Ml^2 \omega^2 (3 \cos^2 \alpha + 1)}{6} \end{aligned}$$

Quanto às forças externas que realizam trabalho, temos apenas o peso, pois Y_A é vertical e o ponto A move-se apenas na horizontal. O trabalho realizado pela força peso será:

$$Mg[y_G(0) - y_G(t)] = Mg[l \sin 30^\circ - l \sin \alpha] = \frac{Mgl(1 - 2 \sin \alpha)}{2}$$

Finalmente, a expressão do TEC fica:

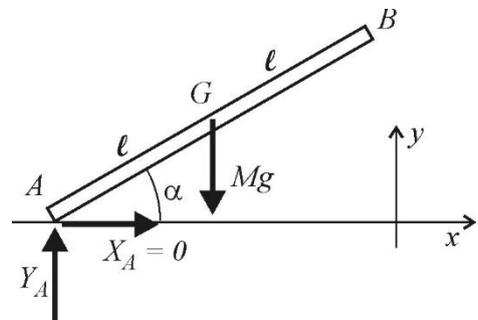
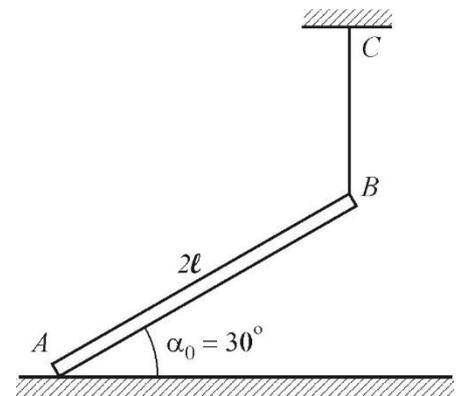
$$\frac{Ml^2 \omega^2 (3 \cos^2 \alpha + 1)}{6} = Mgl(1 - 2 \sin \alpha) \Rightarrow \omega^2 = \frac{6g(1 - 2 \sin \alpha)}{l(3 \cos^2 \alpha + 1)}$$

Esta expressão é válida para qualquer valor de α ; assim, podemos derivar, lembrando que $\dot{\alpha} = \omega$:

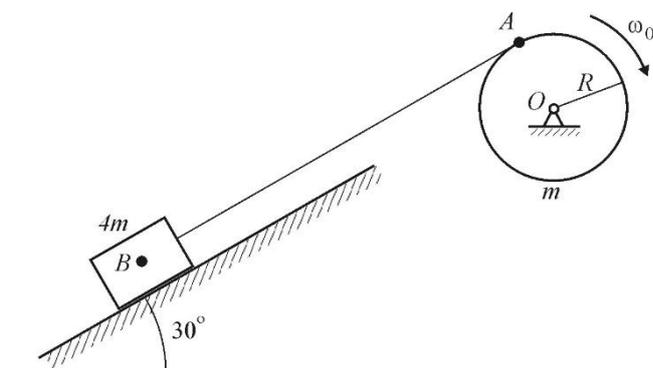
$$2\omega \dot{\omega} = \frac{d}{dt} \left[\frac{6g(1 - 2 \sin \alpha)}{l(3 \cos^2 \alpha + 1)} \right] \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{3g}{l} \left[\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha) - \cos \alpha (3 \cos^2 \alpha + 1)}{(3 \cos^2 \alpha + 1)^2} \right]$$

- b) prestes a se chocar com o plano horizontal $\rightarrow \alpha = 0$.

Portanto: $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$

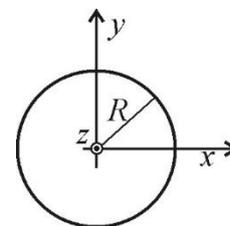


Exemplo 4.2: No sistema indicado na figura, o disco de centro O possui raio r e massa m . O bloco possui massa $4m$. O atrito em todos os contatos é desprezado. Sabemos que no instante $t = 0$ a velocidade angular do disco é ω_0 no sentido indicado. Determine após quanto tempo a velocidade angular se anula, usando o Teorema da Energia Cinética.



Dado:

$$J_z = \frac{MR^2}{2}$$



Resolução:

Isolando o bloco e o disco:

Bloco:

$$\begin{aligned} \tau^{ext} &= \tau_F + \tau_{peso} = \\ &= \int_{s_0}^s F ds + 4mg(s_0 - s) \sin 30^\circ = \int_{s_0}^s F ds - 2mgs \\ \Delta T &= \frac{1}{2} 4m(v_{B_0}^2 - v_B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TEC: } \int_{s_0}^s F ds - 2mgs &= 2m(v_{B_0}^2 - v_B^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{s_0}^s F ds &= 2mgs + 2m(v_{B_0}^2 - v_B^2) \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Disco:

$$\begin{aligned} \tau^{ext} &= \int_{\theta_0}^{\theta} (-F)r d\theta \\ \Delta T &= \frac{1}{2} J_G (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{mr^2}{4} (\omega^2 - \omega_0^2) \end{aligned}$$

$$\text{TEC: } \int_{\theta_0}^{\theta} Fr d\theta = -\frac{mr^2}{4} (\omega^2 - \omega_0^2) \quad (\text{II})$$

Como o fio é inextensível, temos:

$$s = r\theta \Rightarrow ds = r d\theta \text{ e } \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega$$

Assim, re-escrevendo (I):

$$\int_{\theta_0}^{\theta} Fr d\theta = 2mgr\theta + 2mr^2(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Substituindo em (II):

$$2mgr\theta + 2mr^2(\omega^2 - \omega_0^2) = -\frac{mr^2}{4} (\omega^2 - \omega_0^2) \Rightarrow \theta = \frac{9r}{8g} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

Derivando em relação ao tempo: $\dot{\theta} = -\frac{9r}{4g} \omega \dot{\omega}$

Com $\dot{\theta} = \omega$, obtemos: $\dot{\omega} = -\frac{4g}{9r} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{4g}{9r} t$

Para $\omega = 0$, temos:

$$t^* = \frac{9r}{4g} \omega_0$$

