# Inversas de funções deriváveis

**Teo.** Seja $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ função invertível e derivável em $x=c$ com $f'(c)\neq 0$. Então $f^{-1}: f((a,b))\mapsto\mathbb{R}$ também é derivável em $f(c)$ com $(f^{-1})'(f(c)) = 1/f'(c)$.

**OBS:** $d = f(c) \rightsquigarrow c = f^{-1}(d)$.

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

dem.

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}{y-d} = \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(c))}{f(x)-f(c)}$$

$$= \frac{x-c}{f(x)-f(c)} = \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)} \xrightarrow{x\to c} \frac{1}{f'(c)}.$$

$\boxtimes$

$y \in f((a,b)) \quad \therefore \quad y = f(x) \quad x \neq c$

## Aplicações da Regra da Cadeia

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)$$

$f$ derivável em $g(c)$ e $g$ em $x = c$

## Notação de Leibniz

$$z(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \quad \text{com} \quad u' = \frac{du}{dv} \quad \text{e} \quad v' = \frac{dv}{dx}$$

$u(v)$ $\qquad$ $v(x)$

**Exemplos:** 1) Suponha que um gás é bombado no interior de um balão esférico numa taxa constante de 50 $cm^3/s$. Assuma que a pressão do gás é constante e que o balão tem sempre a forma esférica. Estime a taxa de crescimento do raio do balão em $r = 5cm$.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ é o volume da esfera em função do raio $r$.

$V(r(t))$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5cm} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = 50 \qquad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 50 \qquad e \qquad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$50 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rightsquigarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5} = \left.\frac{25}{2\pi r^2}\right|_{r=5} = \frac{1}{2\pi}$$

2) Suponha que o ângulo $\theta$ é medido em grau. Calcule

$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta)$. $\rightsquigarrow$ $\operatorname{sen}\underline{\theta} = \operatorname{sen}(x(\theta))$.

Se $x$ é a medida do ângulo em radianos temos $x = \frac{\pi\theta}{180}$

$y = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} = \cos x(\theta) \cdot \frac{\pi}{180} = \cos\theta \frac{\pi}{180}$.

$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)'$

radiano

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\pi}{180}$$

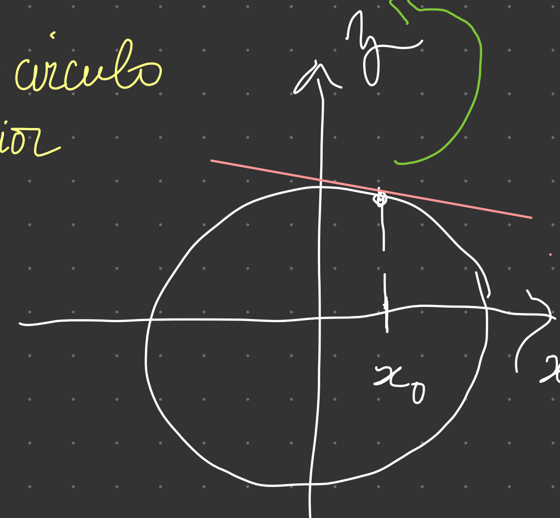
3) A equação do círculo de raio $r$ é: $x^2+y^2=r^2$.

$y(x)=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ e $g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$

semi-círculo superior

semi-círculo inferior

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$




$\frac{dy}{dx} = ?$

$$f'(x) = \left(u \circ v(x)\right)' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \cdot -2x = -\frac{x}{f(x)}$$

$u=\sqrt{v}$ $\quad v(x)=r^2-x^2$

$$g'(x) = \left(-f(x)\right)' = \frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{g(x)}$$

Diferenciação Implícita

4) Podemos calcular as derivadas de $f$ e $g$ definidas em 3) de maneira implícita: $x^2+y^2=r^2$.

$y(x)$

OBS: Aqui supomos que a derivada existe.

$$\frac{dy}{dx} = ? \qquad y(x)$$

$$x^2 + y^2(x) = r^2 \rightsquigarrow \left(x^2 + y^2(x)\right)'_x = \left(r^2\right)'_x$$

$$\rightsquigarrow 2x + 2\,y(x)\cdot y'(x) = 0 \rightsquigarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

5) Determine a equação da reta tangente à curva dada por $x^3 + y^3 = 6xy$ em $(x,y) = (3,3)$.

$$\left(x^3 + y^3\right)'_x = \left(6xy\right)'_x$$

$y(x)$ $\qquad$ $y(x)$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6\left(y + xy'\right)$$

$$y'\left(3y^2 - 6x\right) = 6y - 3x^2 \rightsquigarrow y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

$$y'\Big|_{(x,y)=(3,3)} = \frac{2 \cdot \cancel{3} - 3^{\cancel{2}}}{3^{\cancel{2}} - 2 \cdot \cancel{3}} = -1$$

A reta tangente é:

$$y = -1(x - 3) + 3 = -x + 6.$$