Questão 4 (Lista 1) → Comprometimento limitado

Indivíduos: $\{a, b\}$ Estados: $\{\text{high } (h) ; \text{ low } (l)\}$

Dotações:

$$\begin{cases} y_0^a = y_0^b = 1 \\ (y_t^a, y_t^b) = \begin{cases} (1+\phi \, ; \, 1-\phi) ; & \pi = 1/2 \\ (1-\phi, \, 1+\phi) , & \pi = 1/2 \end{cases} \end{cases}$$

R.R: $c_t^a + c_t^b \leq y_t^a + y_t^b = 1 + 1 = 2$

$$V^i = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad , \forall i$$

A) Planejador Central

V.C: $\{c_t^{a,h}, \, c_t^{a,l}, \, c_t^{b,h}, \, c_t^{b,l}\}$

$$\max_{\{V.C\}} \mathbb{E}[0{,}5V^a + 0{,}5V^b] = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{1}{2}u(c_t^{a,h}) + \frac{1}{2}u(c_t^{a,l})\right] + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{1}{2}u(c_t^{b,h}) + \frac{1}{2}u(c_t^{b,l})\right]$$

$$\text{sa:} \begin{cases} c_t^{a,h} + c_t^{b,h} \leq 2 , & \forall t \\ c_t^{b,l} + c_t^{a,l} \leq 2 , & \forall t \end{cases}$$

$$\mathcal{L}: \frac{1}{4}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[u(c_t^{a,h}) + u(c_t^{a,l}) + u(c_t^{b,h}) + u(c_t^{b,l})\right] +$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t (2 - c_t^{a,h} - c_t^{b,h}) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (2 - c_t^{a,l} - c_t^{b,l})$$

CPOs:

$[c_t^{a,h}]$ $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{a,h}) = \gamma_t$ (1)

$[c_t^{a,l}]$ $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{a,l}) = \lambda_t$ (2)

$[c_t^{b,h}]$ $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{b,h}) = \gamma_t$ (3)

$[c_t^{b,l}]$ $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{b,l}) = \lambda_t$ (4)

De (2), (4) $\Rightarrow$ $u'(c_t^{a,l}) = u'(c_t^{b,l}) \Rightarrow \frac{1}{(c_t^{a,l})^2} = \frac{1}{(c_t^{b,l})^2} \Rightarrow$

$\overset{c_t^i \geq 0}{\Rightarrow}$ $c_t^{a,l} = c_t^{b,l}$ $\overset{\text{Da RR}}{\Longrightarrow}$ $c_t^{a,l} = c_t^{b,l} = 1$

De (1), (3) $\rightarrow$ Análogo! $\Rightarrow (c_t^{a,h}, c_t^{b,h}) = (1, 1)$

⊛ Segue, portanto, que a alocação que resolve o problema ~~(sem incerteza)~~ do P.C ao longo do tempo é:

$$\boxed{c_t^a = c_t^b = 1 \quad \forall t}$$

B) Para mostrar que o plano de consumo não é implementável, basta encontrar um instante t e um indivíduo (a ou b) tal que:

$$\underbrace{u(c_t^i) + \beta E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(c_s^i)\right]}_{A} < \underbrace{u(y_t^i) + \beta E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(y_s^i)\right]}_{B}$$

No plano do planejador:

$$A = u(1) + \beta E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(1)\right] = -1 + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} (-1) = -1 - \beta \sum_{y=0}^{\infty} \beta^{y} =$$

$$= -1 - \beta \cdot \frac{1}{1-\beta} = \frac{-1}{1-\beta}$$

Em um dado instante t, um dos indivíduos terá dotação $1+\phi$. Pegue esse indivíduo e calcule o lado direito da ~~equação~~ inequação:

$$B = -\frac{1}{1+\phi} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+\phi} - \frac{1}{1-\phi}\right) = -\frac{1}{1+\phi} - \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{1+\phi} + \frac{1}{1-\phi}\right) \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} =$$

$$= -\frac{1}{1+\phi} - \frac{\beta}{1-\phi^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} = \frac{-(1-\phi)(1-\beta) - \beta}{(1-\phi^2)(1-\beta)} = \frac{-(1-\phi-\beta+\beta\phi+\beta)}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

$$= \frac{-(1-\phi+\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

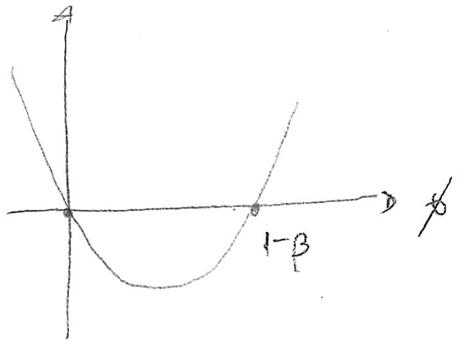
$\longrightarrow$

Calculemos $A - B$:

$$A - B = \frac{-1}{1-\beta} + \frac{(1-\phi+\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)} = \frac{-(1-\phi^2)+1-\phi+\beta\phi}{(1-\phi^2)(1-\beta)} =$$

$$= \frac{-1+\phi^2+1-\phi+\beta\phi}{(1-\phi^2)(1-\beta)} = \frac{\phi^2-\phi(1-\beta)}{(1-\phi^2)(1-\beta)} = \frac{\phi\left[\phi-(1-\beta)\right]}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

→ Note que o denominador de $A-B$ é positivo e que o numerador tem o seguinte formato



Se $\phi < 1-\beta \Rightarrow A-B < 0 \Rightarrow A < B$, ou seja, a estratégia do planejador central é não implementável.

Como $\phi = 0{,}4$ e $1-\beta = 0{,}5$, estamos justamente nesse caso.

c) Problema do Planejador restrito:

$$\max_{\varepsilon} \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\beta^t}{2}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\beta^t}{2}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon}-\frac{1}{1-\varepsilon}\right) - 1$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{2}{1-\varepsilon^2}\right)\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t - 1 = \frac{-\beta}{(1-\beta)(1-\varepsilon^2)} - 1$$

(*) Note que este é um número negativo. Para maximizar, devemos torná-lo o mais próximo possível de zero, maximizando o denominador, ou seja, devemos escolher o menor valor possível para ε que seja compatível com a restrição de compatibilidade.

→ Em um instante em que o indivíduo está com a cotação $1+\phi$, devemos assegurar que:

$$\frac{-1}{1+\varepsilon} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \geq \frac{-1}{1+\phi} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+\phi} - \frac{1}{1-\phi}\right)$$

Lado esquerdo: $$\frac{-1}{1+\varepsilon} - \frac{\beta}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} = \frac{-\left[(1-\varepsilon)(1-\beta) + \beta\right]}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} =$$

$$= \frac{-(1-\beta-\varepsilon+\beta\varepsilon+\beta)}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} = \frac{-(1-\varepsilon+\beta\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)}$$

Lado direito tem o mesmo valor, só trocar ε por ϕ

Lado direito: $$\frac{-(1-\phi+\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

Queremos:

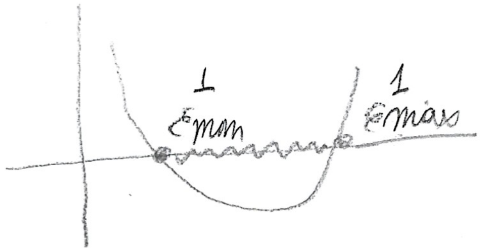
$$\frac{-(1-\varepsilon+\beta\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} \geq -\frac{(1-\phi+\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)} \iff$$

$$\frac{(1-\varepsilon+\beta\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)} \leq \frac{1-\phi+\beta\phi}{1-\phi^2} = x > 0 \iff$$

$$1-\varepsilon+\beta\varepsilon \leq x - x\varepsilon^2 \iff$$

$$x\varepsilon^2 + \beta\varepsilon - \varepsilon + 1 - x \leq 0$$

$$x\varepsilon^2 - (1-\beta)\varepsilon + 1 - x \leq 0$$



$$\varepsilon = \frac{(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 - 4x(1-x)}}{2x} \Rightarrow \text{solução: } \varepsilon \in [\varepsilon^1_{min}, \varepsilon^1_{max}]$$

Onde ε_1 e ε_2 são as soluções da Eq. de 2° grau

→ Também precisamos garantir para o indivíduo com dotação $1-\phi$

$$\underbrace{\frac{-1}{1-\varepsilon} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)}_{\frac{-(1+\varepsilon-\varepsilon\beta)}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)}} \geq \underbrace{\frac{-1}{1-\phi} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-\phi} - \frac{1}{1+\phi}\right)}_{\frac{-(1+\phi-\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)}}$$

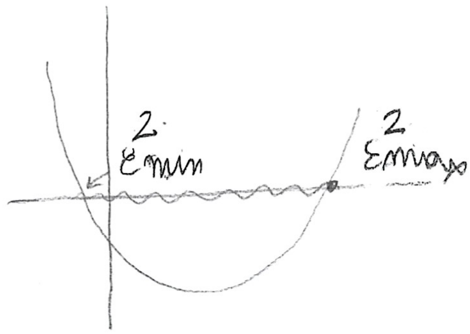
Queremos:

$$\frac{-(1+\varepsilon-\beta\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} \geq -\frac{(1+\phi-\beta\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)} \iff$$

$$\frac{1+\varepsilon-\beta\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)} \leq \frac{1+\phi-\beta\phi}{1-\phi^2} = y > 0 \iff$$

$$1+\varepsilon-\beta\varepsilon \leq y - y\varepsilon^2$$

$$y\varepsilon^2 + (1-\beta)\varepsilon + (1-y) \leq 0$$



$$\varepsilon = \frac{-(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 - 4y(1-y)}}{2y} \Rightarrow \text{Solução } \varepsilon \in \left[\varepsilon^2_{min}, \varepsilon^2_{max}\right]$$

Vamos montar uma tabela com os valores desses parametr

c/D)

$\beta = 0{,}5$

ϕ	x	y	ε^1_{min}	ε^1_{max}	ε^2_{min}	ε^2_{max}
0,40	0,95	1,43	0,13	0,40	-0,75	0,40
0,45	0,97	1,54	0,06	0,45	-0,78	0,45
0,50	1	1,67	0	0,50	-0,80	0,50

→ Em cada caso, devemos escolher o menor valor de ε que satisfaça as duas condições ao mesmo tempo

$\phi = 0{,}40 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}13$

$\phi = 0{,}45 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}06$

$\phi = 0{,}5 \Rightarrow \varepsilon = 0$ (via conclusão que chegamos no item B)

E) A medida em que ϕ aumenta, ε diminui, a ponto de, para $\phi \geq 0{,}5$, a solução do planejador central "irrestrito" de a) ser implementável.

$\uparrow \phi \Rightarrow \uparrow$ mudança de renda $\Rightarrow$ aversão ao risco $\Rightarrow$ mais fácil convencer indivíduo a aceitar P.C

$\Downarrow$

$\downarrow \varepsilon$

LS. 8.9

Tipo ①: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1$; $y_t^1 = \mu > 0 \ \forall t \geq 0$

Tipo ②: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t^2$, $y_t^2 = \begin{cases} 0 & , \text{se } t \geq 0 \text{ par} \\ \alpha = \mu(1+\beta^{-1}) & , \text{se } t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$

A) Um equilíbrio competitivo é uma sequência de preços e alocações tais que dados os preços as alocações maximizam os problemas individuais e há market clearing.

B) Note que a utilidade do indivíduo do tipo 1 é linear. Ele é indiferente, portanto, entre suavizar ou não o consumo ao longo do tempo, diferentemente do tipo 2, que justamente prefere fazê-lo.

Problema do tipo ②:

$$\max_{c_t^2} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t^2 \quad \text{s.a} \quad \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t) c_t^2(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t) y_t^2(s^t)$$

$s_t = \{\text{par}, \text{ímpar}\}$

$$\mathcal{L}: \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t^2 + \lambda \left[\sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t) \left[y_t^2(s^t) - c_t^2(s^t) \right] \right]$$

CPO: $\frac{\beta^t}{c_t^2} = \lambda q_t^0(s^t) \rightarrow q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t}{c_t^2 \lambda}$

normalizando $q_0^0(s^0) = 1 \implies \lambda = \frac{1}{c_0^{2}}$

$$\therefore \quad q_t^0(s^t) = \beta^t \left(\frac{c_t^2}{c_0^2} \right)^{-1}$$

→ Vamos encontrar a que nível $\bar{c}^2$ o indivíduo 2 gostaria de estabilizar seu consumo

R.O vale com igualdade ($\lambda > 0$, utilidade côncava)

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t)\, c_t^2(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} q_t^0(s^t)\, y_t^2(s^t)$$

desconto só os períodos ímpares

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \bar{c}^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \mu (1+\beta^{-1})$$

$\hookrightarrow \beta\mu(1+\beta^{-1}) + \beta^3 \mu(1+\beta^{-1}) + \dots$

$$\frac{\bar{c}^2}{1-\beta} = \frac{\beta\mu(1+\beta^{-1})}{1-\beta^2}$$

$$\bar{c}^2 = \mu \frac{(1+\beta^{-1})(1-\beta)\beta}{(1-\beta^2)} = \mu \frac{(1+\beta^{-1})\beta}{(1+\beta)}$$

Mas $\frac{(1+1/\beta)\beta}{1+\beta} = \frac{\beta+1}{(1+\beta)} = 1$

∴ Essa alocação é factível

$$\bar{c}^2 = \mu \quad \forall t$$

→ Nota que isso envolve 1 dar todo seu dotação no período par ao indivíduo 2.

→ O que garantiria isso? Ele receber algo a mais de μ no período ímpar! Mas quanto?

→ Utilidade se ele não participa do mercado:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu = \frac{\mu}{1-\beta} = A$$

$\beta\mu(1+k) - \beta^3\mu(1+k)$

$+ \ldots$

→ Utilidade de participar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} \cdot 0 + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \mu(1+k) = \frac{\beta\mu(1+k)}{1-\beta^2} = B$$

Ele participa se $B \geq A \Rightarrow \frac{\beta\mu(1+k)}{1-\beta^2} \geq \frac{\mu}{1-\beta} \Rightarrow k \geq \left(\frac{1-\beta^2}{1-\beta}\right)\frac{1}{\beta} - 1 = \frac{1}{\beta}$

- Portanto, se o agente 2 transferir $\frac{1}{\beta}\mu$ de sua dotação no período ímpar, o agente 1 topa.

Assim:

$$c_t^1 = \begin{cases} 0 & , t \geq 0 \text{ par} \\ \mu(1+1/\beta) & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$c_t^2 = \mu \quad \forall t$$

E:

$$b_t^1 = \begin{cases} -\mu & , t \geq 0 \text{ par} \\ \mu/\beta & , t \geq \text{ ímpar} \end{cases} \qquad b_t^2 = \begin{cases} \mu & , t \geq 0 \text{ par} \\ -\mu/\beta & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

$E: \quad q_t^0(s^t) = \beta^t \cdot \left(\frac{\mu}{\mu}\right)^{-1} = \beta^t$

De um período: $\boxed{q = \beta} \rightarrow R_f = \frac{1}{\beta}$ //

Não há mudança de preço ou juros.

c) Assumindo riqueza = preço x dotação descontado ao longo do tempo

$$w_0^1 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t y_t^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu = \frac{\mu}{1-\beta}$$

$$w_t^2 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t y_t^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \mu(1+1/\beta) = \frac{\beta\mu(1+1/\beta)}{1-\beta^2} = \frac{\mu(1+\beta)}{1-\beta^2} = \frac{\mu}{1-\beta}$$

D) Agora:

$$y_t^2 = \begin{cases} 0 & , t \geq 0 \text{ par} \\ \alpha > \mu\left(1+\frac{1}{\beta}\right) & , t \geq 0 \text{ ímpar} \end{cases}$$

Note que: a escolha de participação do agente 1 não se altera, de modo que:

$$c_t^1 = \begin{cases} 0, & \text{se par} \\ \mu(1+1/\beta), & \text{se ímpar} \end{cases} \qquad c_t^2 = \begin{cases} \mu, & \text{se par} \\ \alpha - \mu/\beta, & \text{se ímpar} \end{cases}$$

$$b_t^1 = \begin{cases} -\mu, & \text{se par} \\ \mu/\beta, & \text{se ímpar} \end{cases} \qquad b_t^2 = \begin{cases} \mu, & \text{se par} \\ -\mu/\beta, & \text{se ímpar} \end{cases}$$

Vejamos o preço:

Par: $q_t^{o'}(s^t) = \beta^t \left(\frac{\mu}{\mu}\right)^{-1} = \beta^t$

De 1 período $q_P^1 = \beta \longrightarrow$ Juros: $\frac{1}{\beta}$

Ímpar: $q_t^{o'}(s^t) = \beta^t \left(\frac{\alpha - \mu/\beta}{\mu}\right)^{-1} \Rightarrow q_t^o = \beta^t \cdot \frac{\mu}{\alpha - \mu/\beta}$

Em 1 período: $q_I^1 = \beta\left(\frac{\mu}{\alpha - \mu/\beta}\right) \Rightarrow R_P^I = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\alpha - \mu/\beta}{\mu}$

Como $\alpha > \mu + \mu/\beta \Rightarrow \alpha - \mu/\beta > \mu$

$\Rightarrow q_I^1 < \beta \Rightarrow R_I^1 > \frac{1}{\beta}$

* PS: Note que o indivíduo 2 gostaria de suavizar seu consumo para:

$$\frac{\bar{c}^2}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t+1} \alpha = \frac{\beta\alpha}{1-\beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{c}^2 = \frac{\beta\alpha}{1+\beta} > \beta \frac{\mu(1+\beta^{-1})}{(1+\beta)} = \mu$$

→ Como isso não é possível, ele se contenta em consumir μ nos períodos pares e pagar o mínimo necessário ao indivíduo 1 nos períodos ímpares para que ele participe do mercado

→ Note que, como $\alpha - \mu/\beta > \mu$, ele está melhor do que no item A

→ O indivíduo 1 está igual