

Matemática III (CCM0213) - Lista III de exercícios - Festival de autovalores e autovetores!

Monitor: Victor van Driel

7 de novembro de 2021

Olá a todos. Esta é uma lista que pode ser vista como complementar ou de suporte da lista II, dado que é sobre um aspecto de transformações lineares que parece diminuto, mas na realidade é um dos principais conceitos que permeia grande parte das aplicações de Álgebra Linear.

Como o tema da lista é essencialmente único, a lista está dividida em apenas duas seções: uma composta por exercícios fundamentais, e outra de complementares (“A seção ‘Para pensar um pouco (mas só um pouco)...’ vive!!”). Divirtam-se pelo mega festival de autovalores e autovetores!

1 Exercícios fundamentais

1. Seja $T \in \mathcal{M}_{n \times n}$, e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ o conjunto de seus autovalores. Prove as seguintes relações:

(a) $\text{tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

(b) $\det(T) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$

Dica: lembre-se que o polinômio característico de T é, afinal, um polinômio... Além disso, $p(0) = \det(T)$. Note como a partir da propriedade em (b) conclui-se que uma matriz é inversível se, e somente se, todos os seus autovalores são não-nulos.

2. Seja $V = \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $G : V \rightarrow V$ definida por $G(A) = A^t$, $\forall A \in V$. Determine os autovalores e autovetores correspondentes de G .

3. Julgue as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

(a) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + x_2, x_1 + 5x_3)$. Então **não** existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T .

(b) Seja $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $S(x) = (2x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2, 2x_3)$. Então **não** existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de S .

(c) Seja A uma matriz que admite inversa. Se v é um autovetor de A associado a λ , então é um autovetor de A^{-1} , A^2 e A^{-2} associado respectivamente a λ^{-1} , λ^2 e λ^{-2} .

(d) Se λ é um autovalor da matriz M , x é o autovetor correspondente e γ um escalar, então um autovalor de $M - \gamma I$ é $\lambda - \gamma$, e x é o autovetor correspondente.

- (e) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, α autovalor de A e β autovalor de B . Então $\alpha + \beta$ é autovalor de $A + B$.
4. Mostre que se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ têm os mesmos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ com os mesmos autovetores associados $v_1, \dots, v_n$, então $A = B$.
5. Suponha que temos à disposição um polinômio característico de uma matriz A , dado por: $p(\lambda) = (\lambda - 29)(\lambda - 41)^2(\lambda - 91)^3$. A partir disso, decida se $\exists A^{-1}$, e determine o tamanho de A .

2 Exercícios complementares

1. Demonstre que os autovalores de uma transformação linear hermitiana são reais. Além disso, prove que autovetores associados a diferentes autovalores dessa transformação hermitiana são ortogonais.
2. Seja $V = \{f : [-L, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(L) = f(-L) \text{ e } f'(L) = f'(-L)\}$ e $\mathcal{L} : V \rightarrow V$ dado por $\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$

Chamamos as funções y que satisfazem a equação $\mathcal{L}y = \lambda y$ de *autofunções* do operador diferencial $\mathcal{L}$. Note que se trata de uma equação diferencial, mas que pode ser vista como uma equação de autovalores e autovetores.

Determine os autovalores e as autofunções correspondentes de $\mathcal{L}$.

3. Considere a transformação R de rotação no plano, definida na Lista 2. Responda primeiro intuitivamente, sem contas: essa transformação linear possui autovalores reais? Caso contrário, considere a extensão da transformação linear R no plano dos complexos, e encontre os autovalores e autovetores de R . Você consegue explicar intuitivamente o resultado obtido?
4. Você está na barraquinha de algodão-doce do festival de autovalores e autovetores, quando se depara com 2 grandiosas figuras da história da

Matemática e da Física: Arthur Cayley e William Rowan Hamilton. Depois de cumprimentá-los com tamanha cordialidade e oferecer um pequeno pedaço de seu algodão-doce, os dois cavalheiros compartilham com você um curiosíssimo teorema:

Seja $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Considere agora a sua equação secular, ou polinômio característico, dado por

$$p_M(\lambda) = a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (1)$$

O curioso, é que a *matriz* M satisfaz a sua própria equação característica, isto é, adaptando o polinômio característico para um “polinômio matricial”, é verdade que:

$$p_M(M) = a_N M^N + a_{N-1} M^{N-1} + \dots + a_0 I = 0 \quad (2)$$

Note que os coeficientes são **os mesmos**.

Cayley e Hamilton, muito atarefados (e espertos), se dirigem às outras atrações do festival, sem provar esse teorema para você. Você, em um período de descontração, também não se preocupa em demonstrá-lo, mas está quebrando a cabeça em um exercício chato de inverter uma enorme matriz. Supondo que M admita inversa, mostre que o Teorema de Hamilton-Cayley nos permite encontrar a inversa de M em função de potências de M .