MAP 2220 - Fundamentos de Análise Numérica - BMAC 2021
Notas sobre Método das Aproximações Sucessivas

1 O Básico

Suponha que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é suficientemente regular e que a equação

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

tenha uma única solução, chame essa solução de ξ.

Em termos bem informais o método de aproximações sucessivas para encontrar uma aproximação de ξ consiste em:

(i) Achar uma função contínua $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio é um intervalo fechado da reta e tal que a equação

$$\varphi(x) = x \tag{2}$$

seja equivalente à equação (1) (i.e. as duas equações têm as mesmas soluções).

(ii) Escolher um conveniente ponto $x_0 \in I$ para que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $x_n \in I$, então $x_{n+1} = \varphi(x_n) \in I$

(b) A sequência (x_n) seja convergente.

Se o ponto x_0 satisfaz a condição (ii)-(a) supracitada, diz–se que a órbita de x_0 por φ é infinita.

É desnecessário preocupar-se com a questão *para onde* (x_n) *converge*, se esta sequência convergir será para o ponto desejado!

Fato 1 *Suponha que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e que órbita de $x_0 \in I$ por φ é infinita. Então se (x_n) converge para $\overline{x}$ tem–se que $\overline{x} \in I$ e $\overline{x}$ resolve* (2).

Demonstração: Como I é fechado e $\overline{x}$ é o limite de uma sequência em I, claro que $\overline{x} \in I$.

Da continuidade de φ segue-se que $\varphi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(\overline{x})$.

Por outro lado, $\varphi(x_n) = x_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$.

Da unicidade do limite de sequências segue-se de pronto a tese. ∎

Assim, se vale (ii)-(b), (x_n) converge para um ponto fixo[1] de φ, mas como (1) e (2) são equivalentes e ξ é única solução da primeira equação, resulta que $x_n \to \xi$.

Uma função $\varphi :\longrightarrow \mathbb{R}$ para a qual as equações (1) e (2) são equivalentes será denominada função de iteração de f.

Exemplo 1 DETERMINAR AS RAÍZES DE $p(x) = x^5 + x - 18$.

(I) **Localização e Isolamento:**

Como p tem grau ímpar e é estritamente crescente ($p'(x) = 5x^4+1 > 0$ para todo x), este polinômio tem uma única raiz real. Seja ξ essa raiz.

Uma vez que $p(1) = -16$ e $p(2) = 16$ tem–se $\xi \in [1, 2]$.

(II) **Aproximações de ξ - Método das aproximações sucessivas:**

Neste ponto vai-se apenas determinar algumas funções *candidatas* a serem usadas no método das aproximações sucessivas e fazem–se alguns cálculos preliminares para observar o comportamento desse método.

A parte formal da **prova** da convergência (passo *essencial* para justificar o uso do método) será analisada depois.

(a) Tentativa 1: $\varphi_1(x) = 18 - x^5,\ x_0 = 2$.
Embora as equações $p(x) = 0$ e $\varphi_1(x) = x$ sejam equivalentes (i.e. φ_1 é uma função de iteração de f) e a órbita de todo ponto ser infinita por φ_1, a sequência gerada por essa função a partir de $x_0 = 2$ é $x_1 = \varphi_1(2) = -14,\ x_2 = \varphi_1(-14) = 537842,\ \ldots$ não é difícil provar que $(|x_n|)$ é estritamente crescente e não é limitada.

Exercício 1 *Mostre que se $x_0 \neq \xi$ então a sequência $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$ não converge.*

(b) Tentativa 2: $\varphi_2(x) = \sqrt[5]{18 - x},\ x_0 = 2$.
É simples ver que φ_2 é função de iteração de f e, como φ_2 define-se em toda a reta, as órbitas desta função são infinitas. Nesse ponto não há problemas para aplicar o método das aproximações sucessivas com φ_2.
O cálculo dos primeiros termos da sequência $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$, a partir de $x_0 = 2$, fornece $x_1 = 1.741101127,\ x_2 = 1.746699621$ e

[1] Diz–se que τ é um ponto fixo de uma função g se, por definição, $g(\tau) = \tau$.

$x_3 = 1.746579315$ o que talvez leve a *suspeitar* ter-se obtido uma sequência convergente, mas neste ponto, apenas isto, não está de fato **provada** a convergência, isto será analisado mais adiante...

Exercício 2 *Calcule* $\varphi_2'(x)$*.*

(c) Tentativa 3: $\varphi_3 = \frac{18-x}{x^4}$, $x_0 = 2$.

É imediato ver que $\varphi_3(x) = x$ é função de iteração de f, mas aqui há a questão de φ_3 nã estar definida em $\mathbb{R}$, esta função define-se em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o que coloca a questão da órbita de x_0 ser ou não infinita. É claro que, por exemplo, a órbita de 18 não é infinita, pois $\varphi_3(18) = 0$.

Exercício 3 *Mostre que* $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N}, \varphi_3^k(x) = 0\}$ *é o conjunto dos pontos cuja órbita por* φ_3 *não é infinita.*

O ponto sugerido, $x_0 = 2$ não é um ponto de A (porque?) e a sequência $x_{n+1} = \varphi_3(x_n)$ fica bem definida.

Exercício 4 *Calcule* x_1, x_2, x_3 *e* x_4 *da sequência supramencionada.*
Prove que essa sequência não converge.

(d) Tentativa 4: $\varphi_4(x) = \frac{18}{x^4+1}$, $x_0 = 1.5$.

Exercício 5 *i. Mostre que* φ_4 *é função de iteração de* f*.*

ii. Mostre que as órbitas de todos os pontos de $\mathbb{R}$ *pela funbção* φ_4 *são infinitas.*

iii. Considere $x_0 = 1.5$ *e a sequência* $x_{n+1} = \varphi_4(x_n)$*. Calcule* x_k *para* $1 \leq k \leq 5$ *e discuta a questão da convergência da sequência* (x_n)*.*

(e) Tentativa 5: $\varphi_5(x) = \frac{4x^5+18}{5x^4+1}$, $x_0 = 2$.

Exercício 6 *i. Mostre que* φ_5 *é função de iteração de* f*.*

ii. Mostre que as órbitas de todos os pontos de $\mathbb{R}$ *pela funbção* φ_5 *são infinitas.*

iii. Considere $x_0 = 2$ *e a sequência* $x_{n+1} = \varphi_5(x_n)$*. Calcule* x_k *para* $1 \leq k \leq 5$ *e discuta a questão da convergência da sequência* (x_n)*.*

iv. Calcule $\varphi_5'(\xi)$*.*

2 Contrações

Definição 1 *Uma* contração *em $A \subset \mathbb{R}$ é uma função $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, existe $k \in [0, 1[$ tal que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|, \ \forall (x, y) \in A \times A.$$

Nesta situação diz–se que φ é uma contração de constante *k (ou que k é uma* constante de contração *de φ).*

Claro que toda contração é uniformemente contínua. O exercício a seguir apresenta uma maneira bastante simples de verificar se uma função é uma contração.

Exercício 7 *Se J é um intervalo de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e existe $k \in [0, 1[$ tal que $|\varphi'(x)| \leq k$, para todo $x \in J$, então φ é uma contração de constante k.*

A seguir mostra-se um exemplo de contração que não possui ponto fixo.

Exercício 8 *Considere $\varphi : [17, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \frac{1}{x}$.*
Mostre que φ é uma contração sem pontos fixos.

Contrações podem não ter pontos fixos, mas se os tiverem, não será um grande número.

Fato 2 *Se $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração então f tem no máximo um ponto fixo.*

Demonstração: Seja k a constante de contração de φ, então $0 \leq k < 1$.
Suponha que x_1 e x_2 são pontos fixos de φ. Então

$$|x_1 - x_2| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Então $(1 - k)|x_1 - x_2| \leq 0$, mas $1 - k > 0$ e portanto $(1 - k)|x_1 - x_2| \geq 0$.
Assim, $(1 - k)|x_1 - x_2| = 0$ e, como $1 - k > 0$, segue-se $x_1 = x_2$. ∎

Agora um resultado sobre contrações e o método das aproximações sucessivas.

Fato 3 *Suponha que I é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ e $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração com um ponto fixo $\overline{x}$.*
Se a órbita de $x_0 \in I$ por φ é infinita então a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge.

Demonstração: Por hipótese, a sequência (x_n) está bem definida, então se k é a constante de contração de φ, tem–se $0 \leq k < 1$ e, para todo $n \geq 0$ tem–se

$$|x_n - \overline{x}| \leq k^n |x_0 - \overline{x}|. \qquad (\dagger)$$

A prova de $(\dagger)$ será feita por indução finita em n.

Para $n = 0$ a afirmação é evidente.

Suponha agora, por hipótese de indução (HI), que $(\dagger)$ vale para n, então, como $\overline{x}$ é ponto fixo da contração φ, que tem constante de contração k, segue-se:

$$|x_{n+1} - \overline{x}| = |\varphi(x_n) - \varphi(\overline{x})| \leq k|x_n - \overline{x}| \overset{\mathsf{HI}}{\leq} k^{n+1}|x_0 - \overline{x}|.$$

Isso prova $(\dagger)$, assim, como $0 \leq k < 1$, tem-se $k^n \to 0$ e a tese segue. ∎

Isso mostra que, ao analisar uma função de iteração de f que é uma contração, basta procurar um ponto x_0 cuja órbita seja infinita, não é necessário preocupar-se com a convergência da sequência obtida. Esta pequena observação será destacada em enunciado próprio.

Corolário 1 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a equação* (1) *tenha uma única solução, $\xi \in [a, b]$.*

Suponha $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de iteração para f que também é uma contração de constante k.

Então, se a órbita de $x_0 \in I$ por φ é infinta, a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para ξ e, além disso, para todo $n \geq 0$, tem–se $|x_n - \xi| \leq k^n|x_0 - \xi|$.

Demonstração: Consequência imediata do fato 3. ∎

Observação 1 Na verdade, vale um resultado mais forte do que o enunciado no fato 3, não é necessário admitir que existe um ponto fixo de φ, isto segue-se das demais hipóteses feitas, pode-se provar que
se φ é uma contração definida no intervalo fechado I e a órbita de x_0 por φ é infinita, então a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para um ponto $\overline{x} \in I$ que é ponto fixo dessa função.
Basta provar a convergência de (x_n), pois então as demais conclusões são consequência direta do fato 1. Para provar que (x_n) converge mostra-se que, para todos os naturais $n \geq 0$ e $p \geq 1$, tem–se $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$, assim, esta é uma sequência de Cauchy de reais e portanto converge.

Exercício 9 *Quais das funções de iteração* φ_j*,* $1 \leq j \leq 5$*, usadas nas tentativas feitas no exemplo 1 sã contrações no intervalo* $[1, 2]$*?*

O resultado a seguir é celebrado em prosa e verso num contexto muito mais amplo do que contrações definidas em intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, mas no escopo de MAP2220 é o cenário mais natural para ser colocado.

Fato 4 *Se* $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *é uma contração de constante* k *então:*

(i) φ *um, e só um ponto fixo* $\overline{x}$*.*

(ii) A órbita de todo ponto de $[a, b]$ *por* φ *é infinita e, se* $x_0 \in [a, b]$ *e* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ *então* $x_n \to \overline{x}$ *e, além disso* $|x_n - \overline{x}| \leq k^n(b - a)$*.*

Demonstração: A existência do ponto fixo de φ segue de aplicar o o teorema do valor intermediário a $g(x) = \varphi(x) - x$, a unicidade deste ponto fixo foi mostrada no fato 2.

Como o domínio e o contradomínio de φ são iguais é claro que a órbita de todo ponto de $[a, b]$ por φ é infinita.

As demais afirmações decorrem de pronto do fato 3 com a observação que, como x_0 e $\overline{x}$ estão em $[a, b]$, então $|x_0 - \overline{x}| \leq b - a$. ∎

Exercício 10 *Seja* $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *é uma contração de constante* k *e denote por* $\overline{x}$ *seu ponto fixo.*

Considere $\varepsilon > 0$ *e:*

(i) Encontre o menor natural n_ε *para o qual é possível garantir que, para todo* $x_0 \in [a, b]$*, ao considerar a sequência* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$*, tem–se* $|x_{n_\varepsilon} - \overline{x}| \leq \varepsilon$*. (*$n_\varepsilon$ *não deve depender de* x_0*, apenas de* ε *e* φ*)*

(ii) Tome $x_0 = \frac{a+b}{2}$ *e considere a sequência* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$*. Determine, neste caso, qual o menor natural* n_ε *para o qual é possível garantir que* $|x_{n_\varepsilon} - \overline{x}| \leq \varepsilon$*.*

(iii) Analise os resultados obtidos em (i) e (ii), qual o "ganho"há, se é que existe ganho, ao escolher o ponto médio de $[a, b]$ *como valor inicial* x_0*, considere em particular os casos em que* $k = 0.1$*,* $k = \frac{1}{2}$ *e* $k = 0.9$

Exercício 11 *Considere outra vez as tentativas feitas no exemplo 1 e prove que, para as funções de iteração* φ_2 *e* φ_5*, pode-se escolher* x_0 *em um intervalo* J *conveniente para garantir a convergência das sequências* (x_n) *correspondentes. O que você pode dizer sobre os "convenientes"intervalos* J *em cada um desses dois casos?*

Exercício 12 *Considere* $p(x) = x^5 - 19x + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

(i) *Prove que a equação* $p(x) = 0$ *tem 2 soluções reais positivas, uma delas localizada em* $[0, 1]$ *e a outra localizada em* $[2, 3]$.

Chame α *à raiz dessa equação que está em* $[0, 1]$ *e denote por* β *à localizada em* $[2, 3]$.

Vai-se tentar usar o método das aproximações sucessivas para encontrar as raízes α *e* β *de* $p(x) = 0$ *com a função* $\varphi_1(x) = \frac{x^5+5}{19}$ *ou com a função* $\varphi_2(x) = \sqrt[5]{19x - 5}$.

(ii) *Para procurar uma aproximação de* α *(que está em* $[0, 1]$*) com o método das aproximações sucessivas, qual das duas funções* $\varphi_1(x)$ *ou* $\varphi_2(x)$ *você usaria? Porque? Qual seria o chute inicial que escolheria? Porque? (Observação: não vale responder que escolheria* $x_0 = \alpha$*)*

(iii) *Para procurar uma aproximação de* β *(que está em* $[2, 3]$*) com o método das aproximações sucessivas, qual das duas funções* $\varphi_1(x)$ *ou* $\varphi_2(x)$ *você usaria? Porque? Qual seria o chute inicial que escolheria? Porque?*

Exercício 13 *Seja* $f(x) = 4\cos x - e^{2x},\ x \geq 0$.

(i) *Prove que a equação* $f(x) = 0$ *tem apenas uma solução no intervalo* $[0, +\infty[$.
Chame ξ *a esta solução.*

(ii) *Determine* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\xi \in [n, n + 1]$.

(iii) *Use o método da dicotomia à equação* $f(x) = 0$ *no intervalo* $[n, n + 1]$ *determinado no item anterior e encontre uma aproximação de* ξ *com erro menor ou igual a* $\frac{1}{32}$.

(iv) *Mostre que é possível aplicar o método das aproximações sucessivas em* $[n, n + 1]$ *(com o* n *determinado no item (ii)) com* $\varphi(x) = \frac{\log(4\cos(x))}{2}$ *a partir do valor inicial* $x_0 = n + 1$ *para encontrar uma aproximação de* ξ *com erro menor ou igual a* 10^{-2}. *Sem calcular as iteradas correspondentes, determine o número mínimo de termos da seqência* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *(com* $x_0 = n + 1$*) para encontrar uma aproximação com essa precisão.*