SME0824 Gestão da Qualidade

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Prof. Cibele Russo

cibele@icmc.usp.br

http://www.icmc.usp.br/~cibele

https://www.youtube.com/cibelerussoUSP

[1] Referência principal: Montgomery, D. C. Introdução ao controle estatístico da qualidade. Grupo Gen-LTC, Sétima edição. 2016.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

1. Mais eficaz que os gráficos de controle de Shewhart para detectar que o processo está fora de controle;
2. Mais sensível a pequenas mudanças no processo;
3. Usa informações de toda a sequência de pontos

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

1. Mais eficaz que os gráficos de controle de Shewhart para detectar que o processo está fora de controle;
2. Mais sensível a pequenas mudanças no processo;
3. Usa informações de toda a sequência de pontos

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

1. Mais eficaz que os gráficos de controle de Shewhart para detectar que o processo está fora de controle;
2. Mais sensível a pequenas mudanças no processo;
3. Usa informações de toda a sequência de pontos

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Suponha que amostras de tamanho $n > 1$ são coletadas, e seja $\bar{x}_j$ a média da j-ésima amostra. Se μ_0 é o valor-alvo para a média do processo, forma-se o **gráfico de controle da soma cumulativa** plotando-se a quantidade

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (\bar{x}_j - \mu_0) \tag{1}$$

contra o número da amostra, i. C_i é a soma cumulativa até (e incluindo a) i-ésima amostra.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Suponha que amostras de tamanho $n > 1$ são coletadas, e seja $\bar{x}_j$ a média da j-ésima amostra. Se μ_0 é o valor-alvo para a média do processo, forma-se o **gráfico de controle da soma cumulativa** plotando-se a quantidade

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (\bar{x}_j - \mu_0) \tag{1}$$

contra o número da amostra, i. C_i é a soma cumulativa até (e incluindo a) i-ésima amostra.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Como combinam informações de várias amostras, os gráficos CUSUM são mais eficazes que os gráficos de controle de Shewhart para detectar pequenas mudanças no processo.

Se o processo permanece sob controle no valor-alvo μ_0, a soma cumulativa em (1) é um **passeio aleatório** com média zero.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Como combinam informações de várias amostras, os gráficos CUSUM são mais eficazes que os gráficos de controle de Shewhart para detectar pequenas mudanças no processo.

Se o processo permanece sob controle no valor-alvo μ_0, a soma cumulativa em (1) é um **passeio aleatório** com média zero.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Se a média se desloca para um valor superior $\mu_1 > \mu_0$, por exemplo, então uma tendência positiva para cima se desenvolverá na soma cumulativa. Analogamente, se a média se desloca para baixo, para $\mu_1 < \mu_0$, uma tendência para baixo se desenvolverá em C_i.

Portanto, se uma tendência significante se desenvolve nos pontos plotados, há uma **evidência de que a média do processo mudou**, e deve-se verificar se existe uma causa atribuível para essa mudança.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Se a média se desloca para um valor superior $\mu_1 > \mu_0$, por exemplo, então uma tendência positiva para cima se desenvolverá na soma cumulativa. Analogamente, se a média se desloca para baixo, para $\mu_1 < \mu_0$, uma tendência para baixo se desenvolverá em C_i.

Portanto, se uma tendência significante se desenvolve nos pontos plotados, há uma **evidência de que a média do processo mudou**, e deve-se verificar se existe uma causa atribuível para essa mudança.

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Exemplo:

As 20 primeiras observações foram amostradas de $N(10, 1)$ e as observações seguintes, de uma $N(11, 1)$. O valor-alvo é 10.

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{j=1}^{i}(x_j - 10) = \\ &= (x_i - 10) + \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - 10) \\ &= (x_i - 10) + C_{i-1} \end{aligned}$$

Os dados são dados no arquivo DadosCUSUM.csv no e-disciplinas.

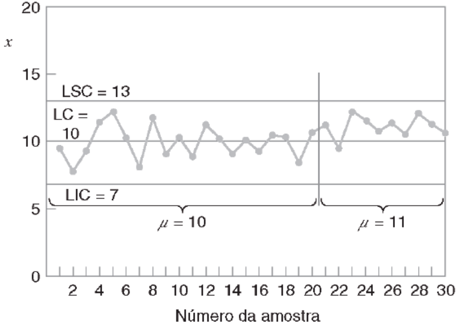


FIGURA 9.1 Um gráfico de controle de Shewhart para os dados da Tabela 9.1.

Fonte: Montgomery (2016)

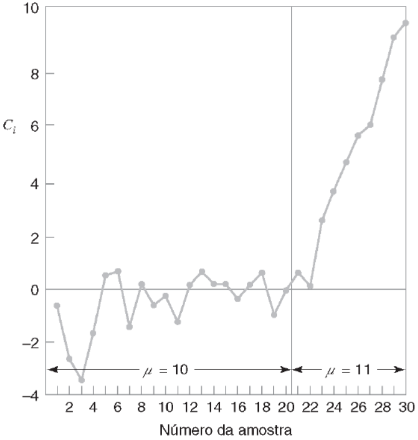


FIGURA 9.2 Gráfico da soma cumulativa a partir da coluna (c) da Tabela 9.1.

Fonte: Montgomery (2016).

Gráfico das somas cumulativas - CUSUM

Há duas maneiras de se representar o CUSUM:

- CUSUM tabular
- Máscara V do CUSUM

CUSUM tabular

Seja X_i a i-ésima observação do processo. Quando o processo está sob controle, X_i tem distribuição normal $N(\mu_0, \sigma^2)$. Vamos supor σ^2 conhecido, e seja x_i o valor observado de X_i.

Seja μ_0 o valor alvo do processo. O CUSUM tabular trabalha acumulando desvios de μ_0 que estejam acima de μ_0 em uma estatística C^+ e abaixo de μ_0 em uma estatística C^-.

C^+ e C^- são chamados de CUSUM's unilaterais superior e inferior, respectivamente.

CUSUM tabular

Seja X_i a i-ésima observação do processo. Quando o processo está sob controle, X_i tem distribuição normal $N(\mu_0, \sigma^2)$. Vamos supor σ^2 conhecido, e seja x_i o valor observado de X_i.

Seja μ_0 o valor alvo do processo. O CUSUM tabular trabalha acumulando desvios de μ_0 que estejam acima de μ_0 em uma estatística C^+ e abaixo de μ_0 em uma estatística C^-.

C^+ e C^- são chamados de CUSUM's unilaterais superior e inferior, respectivamente.

CUSUM tabular

CUSUM tabular

$$C_i^+ = max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$
$$C_i^- = max[0, (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

μ_0 é o valor-alvo e μ_1 é o valor da média fora de controle que queremos detectar rapidamente;

K é o valor de referência (ou de tolerância, ou de folga) e é sempre escolhido entre μ_0 e o valor da média fora de controle μ_1 .

CUSUM tabular

CUSUM tabular

$$C_i^+ = max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$
$$C_i^- = max[0, (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

μ_0 é o valor-alvo e μ_1 é o valor da média fora de controle que queremos detectar rapidamente;

K é o valor de referência (ou de tolerância, ou de folga) e é sempre escolhido entre μ_0 e o valor da média fora de controle μ_1 .

CUSUM tabular

CUSUM tabular

$$C_i^+ = max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$
$$C_i^- = max[0, (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

μ_0 é o valor-alvo e μ_1 é o valor da média fora de controle que queremos detectar rapidamente;

K é o valor de referência (ou de tolerância, ou de folga) e é sempre escolhido entre μ_0 e o valor da média fora de controle μ_1 .

CUSUM tabular

Se a mudança que queremos detectar for expressa em termos de unidades de desvios-padrão, como

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma \text{ (ou } \delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}\text{)}$$

então

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}.$$

CUSUM tabular

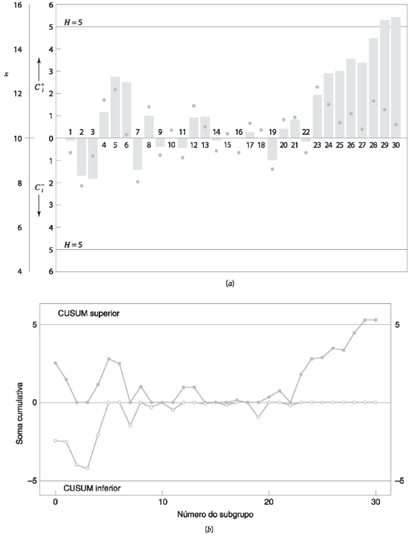
Se a mudança que queremos detectar for expressa em termos de unidades de desvios-padrão, como

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma \text{ (ou } \delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}\text{)}$$

então

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}.$$

CUSUM tabular



■FIGURA 9.3 Gráficos de status do CUSUM para o Exemplo 9.1. (a) Gráfico manual. (b) Gráfico do Minitab.

Fonte: Montgomery (2016).

CUSUM tabular

Note que C_i^+ e C_i^- acumulam desvios a partir do valor alvo μ_0 que são maiores do que K, com ambas as quantidades recolocadas em zero ao se tornarem negativas.

Se C_i^+ ou C_i^- excederem o intervalo de decisão H, o processo é considerado fora de controle.

CUSUM tabular padronizado

Considere a transformação $y_i = \dfrac{x_i - \mu_0}{\sigma}$

CUSUM padronizado

$$C_i^+ = max[0, y_i - K + C_{i-1}^+]$$
$$C_i^- = max[0, -K - y_i + C_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

K e h escolhidos como no caso anterior.

CUSUM tabular padronizado

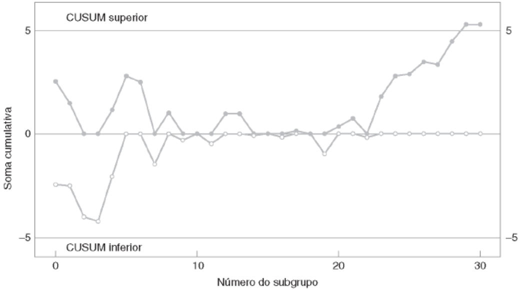
Considere a transformação $y_i = \dfrac{x_i - \mu_0}{\sigma}$

CUSUM padronizado

$$C_i^+ = max[0, y_i - K + C_{i-1}^+]$$
$$C_i^- = max[0, -K - y_i + C_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

K e h escolhidos como no caso anterior.



■**FIGURA 9.4** Um gráfico de status do CUSUM gerado pelo Minitab para os dados da Tabela 9.1, ilustrando a resposta inicial rápida ou característica *headstart*.

Fonte: Montgomery (2016).

CUSUM de escala

Considere a transformação proposta por Hawkins (1981,1993)

$$v_i = \frac{\sqrt{|y_i|} - 0,822}{0,349}$$

Esse autor afirma que a distribuição dos Vi's é aproximadamente normal padrão e sugere o uso do gráfico de CUSUM de escala como a seguir.

Hawkins, D. M. (1981). “A CUSUM for a Scale Parameter," Journal of Quality Technology, Vol. 13(4), pp. 228?235.

Hawkins, D. M. (1993). “Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool,"Q̀uality Engineering, Vol. 5(3), pp. 463?477.

CUSUM de escala

CUSUM de escala

$$S_i^+ = max[0, v_i - K + S_{i-1}^+]$$
$$S_i^- = max[0, -K - v_i + S_{i-1}^-]$$

com valores iniciais $S_0^+ = S_0^- = 0$.

K e h escolhidos como no caso anterior.

A interpretação do CUSUM de escala é semelhante à do CUSUM da média. Se o desvio-padrão do processo crescer (decrescer), os valores de S_i^+ (S_i^-) crescerão (decrescerão) e ultrapassarão H.

CUSUM para variância

CUSUM padronizado

$$
\begin{aligned}
C_i^+ &= max[0, C_{i-1}^+ + S_i^2 + K] \\
C_i^- &= max[0, C_{i-1}^- + S_i^2 - K]
\end{aligned}
$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

O valor K sugerido nesse caso é dado por

$$
K = 2\log\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)\frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}.
$$

CUSUM para variância

CUSUM padronizado

$$C_i^+ = max[0, C_{i-1}^+ + S_i^2 + K]$$
$$C_i^- = max[0, C_{i-1}^- + S_i^2 - K]$$

com valores iniciais $C_0^+ = C_0^- = 0$.

O valor K sugerido nesse caso é dado por

$$K = 2\log(\frac{\sigma_0}{\sigma_1})\frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}.$$

A Máscara V

Proposto por Barnard (1959), a máscara V se aplica a valores sucessivos da estatística CUSUM

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} y_j = y_i + C_{i-1}$$

em que $y_i = \dfrac{x_i - \mu_0}{\sigma}$.

Barnard, George A. Control charts and stochastic processes. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), v. 21, n. 2, p. 239-257, 1959.

A Máscara V

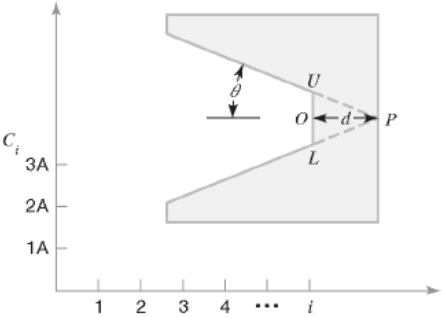


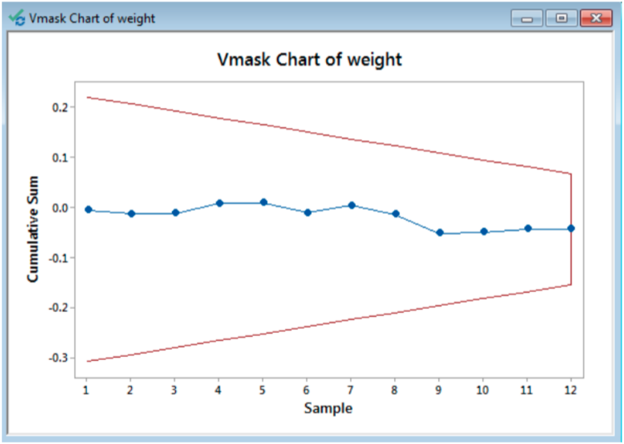
FIGURA 9.5 Uma máscara V típica.

Fonte: Montgomery (2016).

Mais detalhes em Montgomery (2016) Seção 9.1.11.

A Máscara V

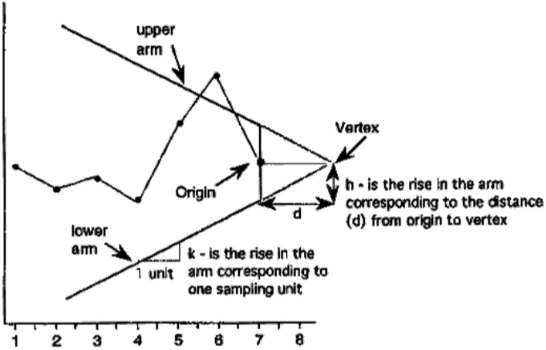
Exemplo:



Fonte: `https://www.leansigmacorporation.com/cumsum-chart-with-minitab/`

A Máscara V

Exemplo:



Fonte: `https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc323.htm`

Exercício

Desenvolva análises para os dados apresentados por gráficos de controle de Shewhart e do CUSUM utilizando o software de sua preferência (R, Python, Minitab, Action).