Política Fiscal no Modelo Neoclássico de Crescimento

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Entender impacto de política fiscal no modelo neoclássico de crescimento
  - Sequência de gastos a ser financiada
  - Conjunto de impostos disponíveis ao governo
- Distorções estáticas e dinâmicas
- Política fiscal ótima: encontrar o conjunto de impostos que minimiza distorções
- Referência:
  - Ljungqvist and Sargent, 2nd edition, chapters 11 and 15

Modelo

- Modelo neoclássico de crescimento, sem incerteza
- Horizonte infinito, tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$
  - A cada período recebem renda do capital e do trabalho
  - Pagam impostos
  - Utilizam renda líquida de impostos para consumo e investimento
  - Investimento amplia estoque de capital no futuro
- Firmas atuam em concorrência perfeita, operam uma função de produção $F(k, n)$
  - Retornos constantes de escala, condições de Inada
  - Contratam capital e trabalho dos agentes

Modelo

- Governo precisa financiar uma sequência de gastos exógena $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$
- Dispõe de um conjunto de impostos:$\{\tau_{ht}, \tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}\}_{t=0}^{\infty}$
  - τ_{ht}: imposto lump-sum
  - τ_{nt}: alíquota de imposto sobre a renda do trabalho
  - τ_{kt}: alíquota de imposto sobre a renda do capital
  - τ_{ct}: alíquota de imposto sobre o consumo
- Por simplicidade, impostos incidem apenas sobre consumidores
  - Poderíamos colocar impostos sobre as firmas sem perda de generalidade
- $\tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}$: impostos lineares

Mercados

- Organização dos mercados: Arrow-Debreu
  - Trocas ocorrem em $t = 0$
  - No período zero, é possível comprar/vender ativos que entregam produto em qualquer período $t \geq 0$
  - Possível também contratar serviços de capital e trabalho a serem "entregues" em determinado período t
- q_t: preço de unidade de produto a ser entregue em t, da perspectiva do período zero
  - Normalize $q_0 = 1$
- w_t: salário em t, em unidades de produto do período t
  - $q_t w_t$: salário em t, em unidades de produto do período zero
- r_t: aluguel do capital em t, em unidades de produto do período t
  - $q_t r_t$: aluguel do capital em t, em unidades de produto do período zero

Preferências e restrições

- Preferências:

$$\mathbb{U} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \overbrace{\ell_t}^{1-n_t})$$

  - $u_c > 0, u_\ell > 0, u_{cc} < 0, u_{\ell\ell} < 0, \beta \in [0,1)$

- Restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1+\tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \right] \leq \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1-\tau_{k,t})r_t k_t + (1-\tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t} \right]$$

  - Em que $q_0 = 1$

Preferências e restrições

- Restrição orçamentária do governo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[\tau_{c,t} c_t + \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{h,t}\right]$$

- Restrição de recursos (no período t):

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

- $k_0 > 0$ dado

Observação

- Poderíamos, alternativamente, utilizar uma formulação de mercados sequenciais:
  - A cada período, há mercados de capital, trabalho e de um título de 1 período (preço $= Q_t$)
  - Nesse caso, a dívida do governo aparece de maneira explícita
- Restrição orçamentária (flow) do agente representativo em t seria:

$$(1+\tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + Q_t b_{t+1} =$$
$$(1-\tau_{n,t})w_t n_t + (1-\tau_{k,t})r_t k_t - \tau_{h,t} + b_t$$

- Restrição orçamentária (flow) do governo:

$$g_t + b_t = \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{c,t} c_t + \tau_{h,t} + Q_t b_{t+1}$$

  - Em que b_t é dívida do governo e ativo do setor privado
- Nesse caso, é também necessário impor uma restrição de Ponzi

Problema do agente

- Problema do agente representativo é dado por:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1 + \tau_{c,t}) c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \right] \leq$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1 - \tau_{k,t}) r_t k_t + (1 - \tau_{n,t}) w_t n_t - \tau_{h,t} \right]$$

$$k_0 > 0, \{q_t, r_t, w_t; \tau_{ht}, \tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t) + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{k,t}) r_t k_t + (1 - \tau_{n,t}) w_t n_t - \tau_{h,t} - (1 + \tau_{c,t}) c_t - k_{t+1} + (1 - \delta) k_t]$$

Problema do agente

- Condições de ótimo:

$$
\begin{aligned}
&[c_t]: && \beta^t u_{c,t} - \lambda q_t (1+\tau_{c,t}) = 0 && (1)\\
&[n_t]: && -\beta^t u_{lt} + \lambda q_t (1-\tau_{n,t}) w_t = 0 && (2)\\
&[k_{t+1}]: && -\lambda q_t + \lambda q_{t+1}\left[(1-\tau_{k,t+1}) r_{t+1} + 1 - \delta\right] = 0 && (3)\\
& && \lim_{t\to\infty} q_t k_{t+1} = 0 && (4)
\end{aligned}
$$

- Da eq. (1):

$$\beta^t u_{c,t} = \lambda q_t (1+\tau_{ct})$$

Como $q_0 = 1$, temos:

$$u_{c,0} = \lambda (1+\tau_{c,0}) \Rightarrow \lambda = \frac{u_{c,0}}{(1+\tau_{c,0})} \Rightarrow$$

$$q_t = \frac{\beta^t u_{c,t}/(1+\tau_{c,t})}{u_{c,0}/(1+\tau_{c,0})} \qquad (5)$$

Problema do agente

- Dividindo (2) por (1):

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1-\tau_{n,t})}{(1+\tau_{c,t})} w_t$$

- Substituindo q_t e q_{t+1} pela expressão (5) em (3), podemos obter a eq. de Euler

$$\beta^t \frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} = \beta^{t+1} \frac{u_{c,t+1}}{(1+\tau_{c,t+1})} [(1-\tau_{k,t+1}) r_{t+1} + 1 - \delta]$$
$$\frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1+\tau_{c,t+1})} [(1-\tau_{k,t+1}) r_{t+1} + 1 - \delta]$$

- Substituindo (5) em (4), encontramos a condição de transversalidade:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

Problema da firma

- Problema da firma é dado por:

$$\max_{\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[F(k_t^d, n_t^d) - w_t n_t^d - r_t k_t^d \right]$$

  - Dadas as sequências $\{q_t, w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$

- Condições de primeira ordem:

$$F_k(k_t^d, n_t^d) = r_t$$

$$F_n(k_t^d, n_t^d) = w_t$$

Equilíbrio competitivo

Para dadas sequências de impostos $\left\{\tau_{h,t}, \tau_{n,t}, \tau_{k,t}, \tau_{c,t}\right\}_{t=0}^{\infty}$ e gastos $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$, podemos definir um equilíbrio competitivo da seguinte forma

Um **equilíbrio competitivo** é:

1. Uma sequência de alocações $\left\{c_t, k_{t+1}, n_t; k_t^d, n_t^d\right\}_{t=0}^{\infty}$
2. Uma sequência de preços$\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$

Tais que:

- Dados $k_0 > 0$, preços $\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$ e impostos $\left\{\tau_{h,t}, \tau_{n,t}, \tau_{k,t}, \tau_{c,t}\right\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, k_{t+1}, n_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema do consumidor representativo
- Dados preços $\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\left\{k_t^d, n_t^d\right\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema da firma

Equilíbrio competitivo

- Mercados em equilíbrio, i.e., para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} k_t &= k_t^d \\ n_t &= n_t^d \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t &= F(k_t, n_t) \end{aligned}$$

Observação: restrição orçamentária do governo implícita na definição de equilíbrio

$$\begin{array}{c} \text{Restrição orçamentária} \\ \text{do consumidor representativo} \\ + \text{ Restrição de recursos} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Restrição orçamentária} \\ \text{do governo} \end{array}$$

Equilíbrio competitivo

- Usando a restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1+\tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t\right] =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1-\tau_{k,t})r_t k_t + (1-\tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t}\right]$$

- Rearranjando:

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - w_t n_t - r_t k_t\right] +$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[\tau_{c,t} c_t + \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{h,t}\right] = 0$$

Equilíbrio competitivo

- Note que $F(k_t, n_t) = w_t n_t + r_t k_t$. Da restrição de recursos:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t) = w_t n_t + r_t k_t$$
$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - w_t n_t - r_t k_t = -g_t$$

- Segue então que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[\tau_{c,t} c_t + \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{h,t}\right]$$

que é a restrição orçamentária do governo.

Equilíbrio competitivo

Portanto, as equações que caracterizam o equilíbrio competitivo são:

1. $$\frac{u_{ct}}{(1+\tau_{ct})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1+\tau_{c,t+1})} \left[(1-\tau_{k,t+1})F_{k,t+1} + 1 - \delta\right]$$

2. $$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1-\tau_{n,t})}{(1+\tau_{c,t})} F_{n,t}$$

3. $$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

4. $$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

5. Restrições orçamentárias do consumidor representativo e do governo.

Alocação eficiente

- Agora obteremos a alocação eficiente, tomando como dada a sequência de gastos $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$
  - Planejador central não está restrito à estrutura de impostos disponíveis, nem à restrição orçamentária do governo
  - Depois nos perguntaremos se é possível implementar a solução eficiente com o conjunto de impostos disponíveis
- Problema do planejador central:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t \leq F(k_t, n_t), \ \forall t \geq 0$$
$$k_0 > 0, \{g_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

Alocação eficiente

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1-n_t) + \mu_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - g_t]\}$$

- Condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} c_t &: \beta^t \{u_{c,t} - \mu_t\} = 0 \Rightarrow u_{c,t} = \mu_t \\ n_t &: \beta^t \left\{-u_{l,t} + \mu_t F_{n,t}\right\} = 0 \Rightarrow u_{l,t} = \mu_t F_{n,t} \\ k_{t+1} &: -\beta^t \mu_t + \beta^{t+1} \mu_{t+1} \left\{F_{k,t+1} + 1 - \delta\right\} = 0 \\ &\Rightarrow \mu_t = \beta \mu_{t+1} [F_{k,t+1} + 1 - \delta] \end{aligned}$$

- Condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0$$

Alocação eficiente

As condições que garantem a alocação eficiente são:

1. $$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = F_{n,t}$$

2. $$u_{c,t} = \beta\, u_{c,t+1} \left[F_{k,t+1} + 1 - \delta\right]$$

3. $$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

4. $$\lim_{t\to\infty} \beta^t u_{c,t} k_{t+1} = 0$$

Equilíbrio competitivo

1. $$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1-\tau_{n,t})}{(1+\tau_{c,t})} F_{n,t}$$

2. $$\frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1+\tau_{c,t+1})} [(1-\tau_{k,t+1}) F_{k,t+1} + 1 - \delta]$$

3. $$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

4. $$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1+\tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

Implementação da solução eficiente

- Há sequências de impostos que implementam a solução eficiente?
  - Fazem com que as eqs. do equilíbrio competitivo sejam iguais às do planejador central
  - Satisfazem a restrição orçamentária do governo
- A estrutura de impostos é bastante ampla, e permite alcançar a solução eficiente de várias formas:
  - Impostos lump-sum não distorcem margens
  - Mas mesmo sem impostos lump-sum, há formas de implementar a solução do planejador central

Implementação da solução eficiente

1. Utilizando apenas impostos lump-sum : $\tau_{c,t} = \tau_{n,t} = \tau_{k,t} = 0$, $\forall t \geqslant 0 \Longrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \tau_{h,t}$
   - Distribuição dos impostos no tempo não importa (dado que satisfaçam a restrição orçamentária do governo) $\Longrightarrow$ Equivalência Ricardiana
2. Taxar apenas a renda de capital em $t = 0$: $\tau_{c,t} = \tau_{n,t} = 0$, $\forall t \geqslant 0$ e $\tau_{k,t} = 0$, $\forall t \geqslant 1$
   - $\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \tau_{k,0} r_0 k_0$
3. Manter constante a alíquota sobre o consumo: $\tau_{c,t} = \overline{\tau}_c$, $\forall t \geqslant 0$
   - Não taxar capital: $\tau_{k,t} = 0$, $\forall t \geqslant 0$
   - Impor subsídio sobre a renda do trabalho que compensa exatamente a distorção de $\overline{\tau}_c$ na margem consumo-lazer
     - ★ Ou imposto sobre a renda no trabalho, e subsídio sobre o consumo para compensar distorção

Implementação da solução eficiente

$$\frac{u_{c,t}}{(1+\overline{\tau}_c)} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1+\overline{\tau}_c)} \left[F_{k,t+1} + (1-\delta)\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1+\overline{\tau}_c)} k_{t+1} = 0$$

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1-\overline{\tau}_n)}{(1+\overline{\tau}_c)} F_{n,t} \Longrightarrow \overline{\tau}_n = -\overline{\tau}_c$$

Checar se:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[\overline{\tau}_c c_t + \overline{\tau}_n w_t n_t\right]$$

Em que $\{q_t, c_t, w_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$ são calculados usando a solução eficiente

Política fiscal ótima

- Conjunto limitado de impostos
  - Não há impostos lump-sum
  - Não há impostos sobre consumo
  - Alíquota de imposto sobre a renda do capital em $t = 0$ é dada τ_{k0}
- Dessa forma, não é possível implementar a solução eficiente
  - Problema sempre envolve distorções
  - Política ótima: minimizar essas distorções

Política fiscal ótima

- **Comprometimento:** governo anuncia em $t = 0$, que implementará a sequência de impostos $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$
  - Agentes acreditam
  - Governo cumpre anúncio no futuro
- Agentes tomam suas decisões com base na alíquota anunciada $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$
  - $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\right\}_{t=0}^{\infty} \Rightarrow \underbrace{\text{Equilíbrio competitivo}}_{\left\{c_t, k_{t+1}, n_t, k_t^d, n_t^d\right\}_{t=0}^{\infty}} \Rightarrow \mathbb{U}$
  - $\left\{\tau'_{n,t}, \tau'_{k,t+1}\right\}_{t=0}^{\infty} \Rightarrow \underbrace{\text{Equilíbrio competitivo}}_{\left\{c'_t, k'_{t+1}, n'_t, k_t'^d, n_t'^d\right\}_{t=0}^{\infty}} \Rightarrow \mathbb{U}'$
- **Problema de Ramsey**: escolher $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ que maximiza $\mathbb{U}$
  - Minimizar distorções geradas pelos impostos
- Resolver indiretamente $\Longrightarrow$ Escolher equilíbrio competitivo $\Longrightarrow$ Inferir alíquotas que levam ao equilíbrio competitivo ótimo

Política fiscal ótima

- No problema de Ramsey, governo se depara com uma restrição adicional – a **Restrição de Implementabilidade**
- Ela indica que a solução:
  - Deve ser alcançada com o conjunto limitado de impostos
    - Impostos lineares sobre a renda do capital e do trabalho
    - Não é possível escolher a alíquota sobre a renda do capital em $t = 0$
  - Satisfaz restrição orçamentária do governo
  - Deve induzir um equilíbrio competitivo
- O governo deve respeitar:
  - Restrição de implementabilidade
  - Restrição de recursos para todo $t \geq 0$

Problema do governo (Problema de Ramsey)

Alocação escolhida deve satisfazer as equações que definem o equilíbrio competitivo (mesmas eqs. derivadas anteriormente, com $\tau_{c,t} = 0$):

- Condições de ótimo do consumidor representativo

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = w_t(1 - \tau_{n,t})$$

$$q_t = q_{t+1}\left[(1 - \tau_{k,t+1})r_{t+1} + 1 - \delta\right]$$

$$q_t = \beta \frac{u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

$$\lim_{t \to \infty} q_t k_{t+1} = 0$$

- Condições de ótimo da firma

$$w_t = F_{n,t}$$

$$r_t = F_{k,t}$$

Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Restrição orçamentária do consumidor

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t + k_{t+1} + (1-\delta)k_t\right] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1-\tau_{n,t})w_t n_t + (1-\tau_{k,t})r_t k_t\right]$$

- Restrição orçamentária do governo

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[\tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{n,t} w_t n_t\right] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t$$

- Restrição de recursos

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Para derivar a restrição de implementabilidade, combinaremos as equações anteriores (exceto a restrição de recursos)
- Não utilizaremos a restrição orçamentária do governo, pois ela é redundante (supondo restrição orçamentária do agente representativo e restrição de recursos válidas)
- Substituiremos preços e impostos, para obter uma expressão apenas em termos de alocações
- Dadas as alocações ótimas, podemos retornar às eqs. originais e descobrir quais os impostos correspondentes

Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Partindo da restrição orçamentária do agente representativo:
$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t - (1-\tau_{n,t}) w_t n_t\right] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{\left[(1-\tau_{k,t}) r_t + 1 - \delta\right] k_t - k_{t+1}\right\}$$
- Abrindo o lado direito da igualdade:

$$\begin{gathered}
\textstyle\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{\left[(1-\tau_{k,t}) r_t + 1 - \delta\right] k_t - k_{t+1}\right\} = \\
q_0 \left[(1-\tau_{k,0}) r_0 + 1 - \delta\right] k_0 - q_0 k_1 + \\
q_1 \left[(1-\tau_{k,1}) r_1 + 1 - \delta\right] k_1 - q_1 k_2 + \\
q_2 \left[(1-\tau_{k,2}) r_2 + 1 - \delta\right] k_2 - q_2 k_3 + \\
\vdots
\end{gathered}$$

Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{ \left[(1-\tau_{k,t}) r_t + 1 - \delta \right] k_t - k_{t+1} \right\} = \\
&q_0 \left[(1-\tau_{k,0}) r_0 + 1 - \delta \right] k_0 + \\
&\underbrace{\left[q_1 \left[(1-\tau_{k,1}) r_1 + 1 - \delta \right] - q_0 \right]}_{=0} k_1 + \\
&\underbrace{\left[q_2 \left[(1-\tau_{k,2}) r_2 + 1 - \delta \right] - q_1 \right]}_{=0} k_2 + \cdots \\
&- \underbrace{\lim_{t\to\infty} q_t k_{t+1}}_{=0}
\end{aligned}$$

- Portanto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{ \left[(1-\tau_{k,t}) r_t + 1 - \delta \right] k_t - k_{t+1} \right\} = \underbrace{q_0}_{1} \left[(1-\tau_{k,0}) \underbrace{r_0}_{F_{k,0}} + 1 - \delta \right] k_0$$

Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t - (1-\tau_{n,t}) w_t n_t\right] = \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta\right] k_0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}} \left[c_t - \frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} n_t\right] = \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta\right] k_0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\boxed{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u_{c,t} c_t - u_{l,t} n_t\right] = u_{c,0} \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta\right] k_0}}_{\text{Restrição de Implementabilidade}}$$

- Restrição de implementabilidade envolve apenas alocações
  - Única exceção é a alíquota sobre a renda do capital em $t = 0$, que não pode ser alterada pelo governo

Problema de Ramsey

- Problema de Ramsey: maximizar utilidade do agente representativo ao longo da vida, tendo como restrições:
  - Restrição de implementabilidade
  - Restrição de recursos em todo $t \geq 0$
  - $\tau_{k,0}, k_0, \{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ dados
- Formalmente:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-n_t)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u_{c,t} c_t - u_{l,t} n_t) = u_{c,0} \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta \right] k_0$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t + g_t = F(k_t, n_t), \forall t \geq 0$$

$$k_0 > 0, \tau_{k,0}, \{g_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

Problema de Ramsey

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1-n_t) + \lambda_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - g_t]\}$$
$$+ \mu \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u_{c,t} c_t - u_{l,t} n_t) - u_{c,0} \left[(1-\tau_{k0}) F_{k0} + 1 - \delta \right] k_0 \right]$$

- Reescrevendo:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ [\overbrace{u(c_t, 1-n_t) + \mu u_{c,t} c_t - \mu u_{l,t} n_t}^{W(c_t, n_t, \mu)}]$$
$$+ \lambda_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - g_t] \}$$
$$- \mu u_{c,0} \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta \right] k_0$$

  - Em que $W(c_t, n_t, \mu) = u(c_t, 1-n_t) + \mu u_{c,t} c_t - \mu u_{l,t} n_t$

Problema de Ramsey

- Condições de primeira ordem (para $t \geq 1$):

$$\begin{aligned} c_t &: \beta^t\{W_{c,t} - \lambda_t\} = 0 \\ n_t &: \beta^t\{W_{n,t} + \lambda_t F_{n,t}\} = 0 \\ k_{t+1} &: -\beta^t\lambda_t + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}\{F_{k,t+1} + 1 - \delta\} = 0 \end{aligned}$$

- Segue portanto que:

$$\begin{aligned} W_{c,t} &= \lambda_t \\ W_{c,t} &= \beta W_{c,t+1}\{F_{k,t+1} + 1 - \delta\} \end{aligned}$$

Política ótima

- Suponha que exista um estado estacionário: $c_t = c, n_t = n, k_t = k$, constantes no tempo. Portanto $W_{c,t} = W_c$.
- A politica ótima implica então que, no longo prazo:

$$1 = \beta\{F_k + 1 - \delta\}$$

- Compare com a eq. de Euler do equilíbrio competitivo:

$$u_{c,t} = \beta u_{c,t+1}\{(1 - \tau_{k,t+1})F_{k,t+1} + 1 - \delta\}$$

que em estado estacionário corresponde a:

$$1 = \beta\{(1 - \tau_k)F_k + 1 - \delta\}$$

Política ótima

- Para encontrar a alíquota de imposto que implementa a solução de Ramsey, escolha τ_k que faz com as duas equações coincidam em estado estacionário
- Isso implica que, no longo prazo, a alíquota de imposto sobre a renda do capital será igual a zero:

$$\tau_k = 0$$

Caso particular

- No caso particular em que a utilidade é separável entre consumo e lazer, e CRRA com relação ao consumo, é possível ir além:

$$u(c, 1-n) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + v(1-n), \;\; v'(\cdot) > 0, \;\; v''(\cdot) < 0$$

- Nesse caso:

$$\begin{aligned} W(c, n, \mu) &= u(c, 1-n) + \mu u_c c - \mu u_l n = \\ &= \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + v(1-n) + \mu c^{-\gamma} c + \mu v'(1-n) n \\ &= \left[\frac{1}{1-\gamma} + \mu \right] c^{1-\gamma} + v(1-n) + \mu v'(1-n) n \end{aligned}$$

- Portanto:

$$W_c = [1 + \mu(1-\gamma)] \, c^{-\gamma}$$

Caso particular

- Da solução do problema de Ramsey, a política ótima implica que:

$$W_{c,t} = \beta W_{c,t+1}\{F_{k,t+1} + 1 - \delta\}, \forall t \geq 1$$

- Nessa parametrização, isso corresponde a:

$$[1+\mu(1-\gamma)]\, c_t^{-\gamma} = \beta\, [1+\mu(1-\gamma)]\, c_{t+1}^{-\gamma}\left(F_{k,t+1} + 1 - \delta\right), \forall t \geqslant 1$$

$$c_t^{-\gamma} = \beta\, c_{t+1}^{-\gamma}\left(F_{k,t+1} + 1 - \delta\right), \forall t \geqslant 1$$

- Da eq. de Euler do equilíbrio competivo:

$$c_t^{-\gamma} = \beta\, c_{t+1}^{-\gamma}\left[(1-\tau_{k,t+1})F_{k,t+1} + 1 - \delta\right]$$

- A política ótima então implica que:

$$\tau_{k,t+1} = 0, \forall t \geq 1 \text{ ou } \tau_{k,t} = 0, \forall t \geq 2$$

Taxação incompleta

- Correia (1996), JPubE
- Há um fator de produção (z) com oferta inelástica, mas que não pode ser taxado

$$y_t = F(k_t, n_t, z_t)$$

- z e k são complementares:

$$F_{kz} = \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial z} > 0$$

- Oferta inelástica:

$$z_t = Z$$

- Nesse caso, taxação ótima sobre a renda do capital não será nula no longo prazo

Consumidor representativo

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-n_t)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t\right] \leq$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[(1-\tau_{k,t})r_t k_t + (1-\tau_{n,t})w_t n_t + p_t^z Z\right]$$

$$k_0 > 0, \{q_t, r_t, w_t, p_t^z; \tau_{nt}, \tau_{kt}\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-n_t) + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1-\tau_{k,t})r_t k_t + (1-\tau_{n,t})w_t n_t + p_t^z Z - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t]$$

Consumidor representativo

- Condições de ótimo não se alteram:

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = (1 - \tau_{n,t}) w_t$$

$$u_{c,t} = \beta u_{c,t+1} \left[(1 - \tau_{k,t+1}) r_{t+1} + 1 - \delta \right]$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t u_{c,t} k_{t+1} = 0$$

$$q_t = \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

Problema da firma

- Problema da firma é dado por:

$$\max_{\{k_t^d, n_t^d, z_t^d\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[F(k_t^d, n_t^d, z_t^d) - w_t n_t^d - r_t k_t^d - p_t^z z_t^d \right]$$

  - Dadas as sequências $\{q_t, w_t, r_t, p_t^z\}_{t=0}^{\infty}$
- Condições de primeira ordem:

$$F_k(k_t^d, n_t^d, z_t^d) = r_t$$

$$F_n(k_t^d, n_t^d, z_t^d) = w_t$$

$$F_z(k_t^d, n_t^d, z_t^d) = p_t^z$$

Equilíbrio competitivo

Para dadas sequências de impostos $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t}\right\}_{t=0}^{\infty}$ e gastos $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$, podemos definir um equilíbrio competitivo da seguinte forma

Um **equilíbrio competitivo** é:

1. Uma sequência de alocações $\left\{c_t, k_{t+1}, n_t; k_t^d, n_t^d, z_t^d\right\}_{t=0}^{\infty}$
2. Uma sequência de preços$\{w_t, r_t, p_t^z, q_t\}_{t=0}^{\infty}$

Tais que:

- Dados $k_0 > 0$, preços $\{w_t, r_t, p_t^z, q_t\}_{t=0}^{\infty}$ e impostos $\left\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t}\right\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, k_{t+1}, n_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema do consumidor representativo
- Dados preços $\{w_t, r_t, p_t^z, q_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\left\{k_t^d, n_t^d, z_t^d\right\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema da firma

Equilíbrio competitivo

- Mercados em equilíbrio, i.e., para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} k_t &= k_t^d \\ n_t &= n_t^d \\ z_t^d &= Z \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t &= F(k_t, n_t, Z) \end{aligned}$$

Restrição de implementabilidade

- Da restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[c_t - (1-\tau_{n,t}) w_t n_t - \underbrace{p_t^z}_{=F_{z,t}} Z \right] =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \left\{ \left[(1-\tau_{k,t}) r_t + 1 - \delta \right] k_t - k_{t+1} \right\}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}} \left[c_t - \frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} n_t - F_{z,t} Z \right] = \underbrace{q_0}_{1} \left[(1-\tau_{k,0}) \underbrace{r_0}_{F_{k,0}} + 1 - \delta \right] k_0$$

- Restrição de implementabilidade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u_{c,t} (c_t - F_{z,t} Z) - u_{l,t} n_t \right] = u_{c,0} \left[(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta \right] k_0$$

Problema de Ramsey

- Problema de Ramsey: maximizar utilidade do agente representativo ao longo da vida, tendo como restrições:
  - Restrição de implementabilidade
  - Restrição de recursos em todo $t \geq 0$
  - $\tau_{k,0}, k_0, \{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ dados
- Formalmente:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u_{c,t}(c_t - F_{z,t} Z) - u_{l,t} n_t] = u_{c,0} [(1 - \tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta] k_0$$

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t + g_t = F(k_t, n_t, Z), \forall t \geq 0$$

$$k_0 > 0, \tau_{k,0}, \{g_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

Problema de Ramsey

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1-n_t) + \lambda_t [F(k_t, n_t, Z) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - g_t]\}$$

$$+\mu \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u_{c,t}(c_t - F_{z,t} Z) - u_{l,t} n_t] - u_{c,0} [(1-\tau_{k0}) F_{k0} + 1 - \delta] \, k_0 \right]$$

- Reescrevendo:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \overbrace{[u(c_t, 1-n_t) + \mu \, u_{c,t}(c_t - F_{z,t} Z) - \mu \, u_{l,t} n_t]}^{W(c_t, n_t, k_t, \mu)}$$

$$+ \lambda_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t - g_t]\}$$

$$- \mu \, u_{c,0} [(1-\tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta] \, k_0$$

  - Em que $W(c_t, n_t, k_t, \mu) = u(c_t, 1-n_t) + \mu \, u_{c,t}(c_t - F_{z,t} Z) - \mu \, u_{l,t} n_t$
  - W depende de k_t pois $F_{kz} > 0$

Problema de Ramsey

- **Observação**: um aumento exógeno em $\tau_{k,0}$ faz com que o bem estar aumente:
  - Trata-se de um imposto não distorcivo
  - Diminui a necessidade de taxação distorciva para financiar sequência de gastos
- Logo:
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \tau_{k,0}} > 0$$
- Note que:
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \tau_{k,0}} = \mu u_{c,0} F_{k,0} k_0$$
- Isso implica que:
$$\mu > 0$$

Problema de Ramsey

- Condições de primeira ordem (para $t \geq 1$):

$$
\begin{aligned}
c_t &: \beta^t \{W_{c,t} - \lambda_t\} = 0 \\
n_t &: \beta^t \{W_{n,t} + \lambda_t F_{n,t}\} = 0 \\
k_{t+1} &: -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} [W_{k,t+1} + \lambda_{t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\}] = 0
\end{aligned}
$$

- Segue portanto que:

$$\lambda_t = \beta [W_{k,t+1} + \lambda_{t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\}]$$

- Note que:

$$W_{k,t} = -\mu u_{c,t} F_{kz,t} Z$$

Política ótima

- Em estado estacionário, a política ótima implica que:

$$\lambda = \beta[W_k + \lambda\{F_k + 1 - \delta\}]$$
$$1 = \frac{\beta W_k}{\lambda} + \beta\{F_k + 1 - \delta\}$$

- Equilíbrio competitivo:

$$\begin{aligned} 1 &= \beta\{(1-\tau_k)F_k + 1 - \delta\} \\ &= -\beta\tau_k F_k + \beta\{F_k + 1 - \delta\} \end{aligned}$$

- Política ótima:

$$\tau_k F_k = -\frac{W_k}{\lambda} = \frac{\mu u_c F_{kz} Z}{\lambda}$$

- Portanto:

$$\tau_k = \frac{\mu u_c F_{kz} Z}{\lambda F_k} > 0$$