Regra da Cadeia

Vetor Gradiente

Seja f uma função que admite derivadas parciais num ponto (x_0, y_0). O vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ é denominado de gradiente de f em x_0, y_0, denotado por $\nabla f(x_0,y_0)$ [grad $f(x_0,y_0)$]

O gradiente é o vetor formado por duas derivadas parciais de f no ponto.

Consideraremos neste estudo

$$A \subset \mathbb{R}^2$$
$$(x_0,y_0) \in A$$
$$f \text{ é diferenciável em } (x_0,y_0)$$

A função

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}^{=\nabla f(x_0,y_0)(x-x_0,\, y-y_0)}\right]}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}$$

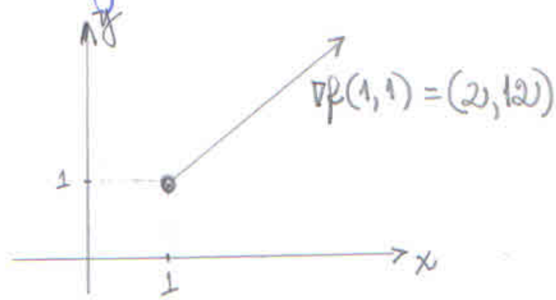
e tem a propriedade $\underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}}_{\text{Diferenciabilidade de } f} = 0$

Ex: Considere a função $f(x,y) = x^2 + 4y^3$, $\nabla f(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3$$

$$\nabla f(1,1) = (2, 12)$$

Esse vetor será interpretado da seguinte forma:

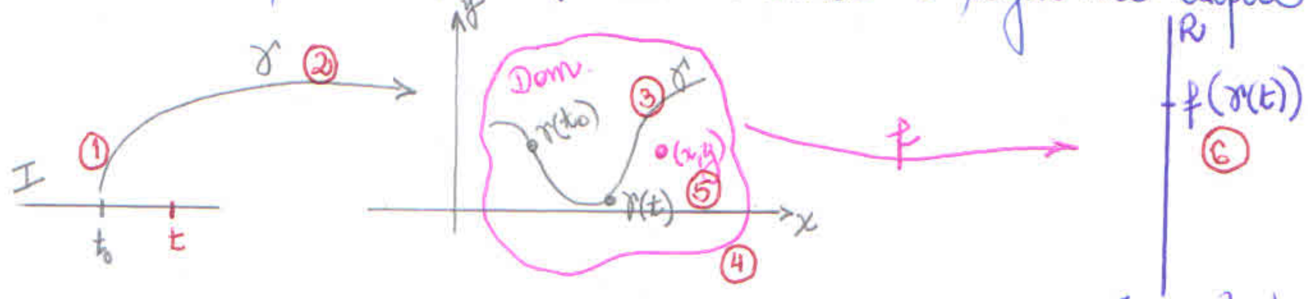


A regra da Cadeia está associada a derivada de uma função composta.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

tal que x e y são derivadas em $t_0 \in I$, e que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(t) \in A$, $\forall t \in I$. Então teremos o seguinte esquema



Função de uma variável

$g(t) = f(\gamma(t))$

Então a regra da Cadeia será correspondente a:

$$\boxed{g'(t) = \nabla f(\gamma(t_0)) . \gamma'(t_0)}$$

$g'(t)$ corresponde ao gradiente de f calculado em t_0 produto escalar da derivada γ em t_0.

Ex. Considere o exemplo: $f(x,y) = x^2 + 3y^2$
$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$

a) $g(t) = f(\gamma(t))$, $g'(t)$?

$$g(t) = f(\operatorname{sen} t, \cos t) = \operatorname{sen}^2 t + 3\cos^2 t$$

$$g'(t) = 2\operatorname{sen} t . \cos t + 6\cos t . (-\operatorname{sen} t)$$

$$g'(t) = 2\operatorname{sen} t . \cos t - 6\operatorname{sen} t . \cos t$$

$$g'(t) = -4\operatorname{sen} t . \cos t$$

b) A partir da fórmula $g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

$\nabla f = (2x, 6y)$

Cálculo do ∇f em $\gamma(t)$

$\nabla f(\gamma(t)) = (2\,\text{sen}\,t, 6\cos t)$

$$g'(t) = (2\,\text{sen}\,t, 6\cos t) \cdot \overset{\gamma'(t)}{(\cos t, -\text{sen}\,t)}$$

$$g'(t) = 2\,\text{sen}\,t \cdot \cos t + \underbrace{6\cos t(-\text{sen}\,t)}_{-6\,\text{sen}\,t\cos t}$$

$$g'(t) = -4\,\text{sen}\,t\cos t$$

Teorema da Regra da Cadeia

$A \subset \mathbb{R}^2$, aberto.

Se f for diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$ e se a $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ diferenciável em $t_0 \in I$ é uma curva tal que $\gamma(t) \in A$, $\forall t$ e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, então a função composta $g(t) = f(\gamma(t))$ é diferenciável em t_0.

$$g'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

Demonstração:

$$g'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0}$$

Como f é diferenciável em (x_0,y_0), tem-se:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{Prod. Escalar}}+E(x,y) \quad (1)$$

e $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}=0$$

Seja $$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{E(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} & , \text{ se } (x,y)\neq(x_0,y_0)\\[2mm] 0 & , \text{ se } (x,y)=(x_0,y_0)\end{cases}$$

De acordo com a equação (1), tem-se:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+\varphi(x,y)\cdot|(x,y)(x_0,y_0)|$$

Em particular para $(x,y)=\gamma(t)$

$$f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot[\gamma(t)-\gamma(t_0)]+\varphi(\gamma(t)).|\gamma(t)-\gamma(t_0)|$$

$$\div(t-t_0)$$

Então,

$$\frac{f(\gamma(t))-f(x_0,y_0)}{t-t_0}=\underbrace{\nabla f(\gamma(t_0))}_{\text{constante}}\cdot\underbrace{\frac{[\gamma(t)-\gamma(t_0)]}{t-t_0}}_{\gamma'(t_0)}+\underbrace{\varphi(\gamma(t))}_{=0}.\frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}{t-t_0}$$

$$\underline{\underline{g'(t_0)=\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t_0)}}$$