MONITORIA MACRO (IV) 01/11/21

LISTA (1)

Q.2) $U_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right]$

Eq: $c_t = y_t$
$s_t = 1$

$$c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$$

A) Variáveis de estado s, y (agregado)
controle: c, s_{t+1}

$$\max_{c_t} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right] \quad \text{s.a} \quad c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$$

na forma recursiva

$$V(s_t, y_t) = \max_{c_t, s_{t+1}} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta \cdot E\left[V(s_{t+1}, y_{t+1}) \mid y_t \right] \right\}$$

$$\text{s.a:} \quad c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$$

Substituindo a R.O:

$$V(s_t, y_t) = \max_{s_{t+1}} \frac{\left[s_t y_t - p_t(s_{t+1} - s_t) \right]^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta E\left[V(s_{t+1}, y_{t+1}) \mid y_t \right]$$

CPO: $\quad -p_t c_t^{-\gamma} + \beta E\left[V_1(s_{t+1}, y_{t+1}) \mid y_t \right] = 0$

$$p_t c_t^{-\gamma} = \beta E\left[V_1(s_{t+1}, y_{t+1}) \mid y_t \right]$$

T. Envelope:
$$V_1(s_t, y_t) = C_t^{-\gamma}(P_t + y_t)$$
$$V_1(s_{t+1}, y_{t+1}) = C_{t+1}^{-\gamma}(P_{t+1} + y_{t+1})$$

Substituindo:

$$P_t C_t^{-\gamma} = \beta E_t \{ C_{t+1}^{-\gamma} (P_{t+1} + y_{t+1}) \} \quad (1)$$

B) Um equilíbrio competitivo recursivo é dado por:

1) Uma função valor $V(s_t, y_t)$
2) Regras de decisão p/ o agente: $C_t(s_t, y_t)$, $s_{t+1}(s_t, y_t)$
3) Funções preço: $P_t(y)$

Tais que: dado (3), (2) Resolve o problema do agente e os mercado estão em equilíbrio: $s_t = 1$ e $C_t = y_t$ $\forall t$

C) Substituindo o equilíbrio em (1):

$$P_t y_t^{-\gamma} = \beta E_t \{ y_{t+1}^{-\gamma} (P_{t+1} + y_{t+1}) \}$$

$$P_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{y_{t+1}}{y_t} \right)^{-\gamma} (y_{t+1} + P_{t+1}) \right\} \quad (2)$$

D) Avalie (1) em t+1:

$$p_{t+1} = \beta E_{t+1}\left\{\left(\frac{y_{t+2}}{y_{t+1}}\right)^{-\gamma}(y_{t+2}+p_{t+2})\right\}$$

Substituindo (e aplicando a L.E.I)

$$p_t = \beta E_t\left\{\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{-\gamma}\left(y_{t+1} + \beta E_{t+1}\left\{\left(\frac{y_{t+2}}{y_{t+1}}\right)^{-\gamma}(y_{t+2}+p_{t+2})\right\}\right)\right\}$$

$$= E_t\left\{\beta\cdot\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{-\gamma} y_{t+1} + \beta^2\left(\frac{y_{t+2}}{y_t}\right)^{-\gamma}\left[y_{t+2}+p_{t+2}\right]\right.$$

Fazendo o procedimento ao infinito:

$$p_t = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j \frac{E_t(y_{t+j}^{1-\gamma})}{y_t^{-\gamma}}}_{\text{VALOR FUNDAMENTAL}} + \underbrace{\lim_{j\to\infty}\beta^j \frac{E_t(y_{t+j}^{-\gamma}p_{t+j})}{y_t^{-\gamma}}}_{\text{BOLHA}}$$

VALOR FUNDAMENTAL
↓
DIVIDENDOS DA ÁRVORE

BOLHA

Deve ser igual a zero!

↳ PREÇO > FUNDAMENTO → agentes querem vender

PREÇO < FUNDAMENTO → agentes querem comprar

∴ BOLHA = 0

Assim:

$$\boxed{p_t = \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j \frac{E_t(y_{t+j}^{1-\gamma})}{y_t^{-\gamma}}}$$

//

E) Propriedade do lognormal: $\ln y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(y^n) = \exp\left(n\mu + \frac{1}{2} n^2 \sigma^2\right)$$

Assim: $E(y_t^{1-\gamma}) = \exp\left[(1-\gamma)\mu + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right]$

$$\therefore \quad p_t = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \exp\left[(1-\gamma)\mu + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right]}{y_t^{-\gamma}}$$

$\longrightarrow$ soma de PG infinita!

$$p_t = \frac{\beta \exp\left[(1-\gamma)\mu + 1/2\,(1-\gamma)^2\sigma^2\right]}{(1-\beta)\, y_t^{-\gamma}}$$

F) Nesse caso: $p_t = \dfrac{\beta \exp\left[(1-\gamma)10\mu + 1/2\,(1-\gamma)^2\sigma^2\right]}{(1-\beta)\, y_t^{-\gamma}}$

y_t mais produtivo $\longrightarrow$ espera-se que o futuro renda mais $\longrightarrow$ maior o preço da ação

Q3) Dois períodos: $t=0$ e $t=1$

Dois indivíduos: X e Z

∄ incerteza agregada

Notações:

$$\begin{cases} t=0: & y_0^X = y_0^Z = 1 \\ t=1: & \begin{cases} s_A: & y_1^X(s_A) = 1+\sigma \;;\; y_1^Z(s_A) = 1-\sigma \;;\; \pi(s_A) = 1/2 \\ s_B: & y_1^X(s_B) = 1-\sigma \;;\; y_1^Z(s_B) = 1+\sigma \;;\; \pi(s_B) = 1/2 \end{cases} \\ \sigma \in (0,1) & \end{cases}$$

Restrições mercados completos:

(I) $c_0^i + q_A b_A^i + q_B b_B^i = y_0^i = 1$

(II) $c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b_A^i$

(III) $c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b_B^i$

Utilidade: $u^i = \ln c_0^i + \beta\left\{\frac{1}{2}\ln c_1^i(s_A) + \frac{1}{2}\ln c_1^i(s_B)\right\}$

A) Problema do agente $i = X, Z$

V.C: $\{c_0^i, c_1^i(s_A), c_1^i(s_B), b_A^i, b_B^i\}$

$$\max_{\{VC\}} \ln c_0^i + \beta\left\{\frac{1}{2}\ln c_1^i(s_A) + \frac{1}{2}\ln c_1^i(s_B)\right\} \quad \text{s.a:} \quad (I), (II), (III)$$

Substituindo as restrições na função objetivo

$$\max_{b_A^i, b_B^i} \ln(1 - q_A b_A^i - q_B b_B^i) + \frac{\beta}{2}\ln[y_1^i(s_A) + b_A^i] + \frac{\beta}{2}[y_1^i(s_B) + b_B^i]$$

CPO:

$$\left.\begin{aligned} [b_A^i]: \quad & -\frac{q_A}{c_0^i} + \frac{\beta}{2c_1^i(s_A)} = 0 \\ [b_B^i]: \quad & -\frac{q_B}{c_0^i} + \frac{\beta}{2c_1^i(s_B)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{condições de ótimo } \forall i$$

Condições de Equilíbrio:

$$c_0^x + c_0^z = c_1^x(s_A) + c_1^z(s_A) = c_1^x(s_B) + c_1^z(s_B) = 2$$

$$b_A^x + b_A^z = b_B^x + b_B^z = 0$$

B) Da primeira CPO: $c_0^i = \frac{2q_A}{\beta} c^i(s_A) = \frac{2q_A}{\beta}\left[y_1^i(s_A) + b_A^i\right]$

Market clearing: $c_0^x + c_0^z = 2$

$$\Rightarrow \frac{2q_A}{\beta}\Big[\underbrace{y_1^x(s_A) + y_1^z(s_A)}_{2} + \underbrace{b_A^x + b_A^z}_{0}\Big] = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2q_A}{\beta} = 1 \Rightarrow \boxed{q_A = \frac{\beta}{2}}$$

Analogamente $c_0^i = \frac{2q_B}{\beta} c^i(s_B) = \frac{2q_B}{\beta}\left[y_1^i(s_B) + b_B^i\right]$

$$\Rightarrow \frac{2q_B}{\beta}\left[y_1^x(s_B) + y_1^z(s_B) + b_B^z + b_B^x\right] = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{q_B = \frac{\beta}{2}}$$

⊛ coisa legal para ver em casa: consumption smooth

$$b_A^x = b_B^z = -\sigma$$

$$b_B^x = b_A^z = \sigma$$

c) Um ativo livre de risco paga uma unidade de consumo independente do estado da natureza. Num mundo de mercados completos, basta combinar uma unidade do ativo A com uma do B. O preço será:

$$q_f = q_A + q_B = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$$

$$1 + r_f = \frac{1}{q_f} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \boxed{r_f = \frac{1}{\beta} - 1}$$

D) Problema do indivíduo:

VC: $\{c_0^i, c^i(s_A), c^i(s_B), b^i\}$

Você não consegue se proteger totalmente do mercado que gostaria

$$\max_{\{vc\}} \ln c_0^i + \frac{\beta}{2}\{\ln c_1^i(s_A) + \ln c_1^i(s_B)\} \text{ s.a } \begin{cases} c_0^i + q b^i = 1 \\ c^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b^i \\ c^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b^i \end{cases}$$

Substituindo: $\max_{b} \ln(1 - q b^i) + \frac{\beta}{2}\{\ln[b^i + y_1^i(s_A)] + \ln[b^i + y_1^i(s_B)]\}$

CPO:
$$\frac{-q}{1 - q b^i} + \frac{\beta}{2}\left[\frac{1}{b^i + y_1^i(s_A)} + \frac{1}{b^i + y_1^i(s_B)}\right] = 0 \quad \forall i$$

E) Como há apenas 1 ativo, se um indivíduo deseja comprá-lo ($b>0$), dado que a CPO é a mesma p/ 1 e 2, o outro também desejará, o que violaria a condição de market-clearing. O caso oposto ($b<0$) é análogo. Assim, resta que a solução é $b^i = 0 \ \forall i$.

Substituindo: $-q + \frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{y_1^i(s_A)} + \frac{1}{y_1^i(s_B)}\right\} = 0 \Rightarrow$

$$q = \frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}\right\} \Rightarrow q = \frac{\beta}{2}\frac{2}{1-\sigma^2} \Rightarrow \boxed{q = \frac{\beta}{1-\sigma^2}}$$

Assim: $\boxed{R_f' = \frac{1-\sigma^2}{\beta} - 1}$

F) Como $\sigma^2 > 0 \Rightarrow \frac{1-\sigma^2}{\beta} < \frac{1}{\beta} \Rightarrow R_f' < R_f$

Ou seja, sob a condição de mercados incompletos a taxa de juros livre de risco é menor (pois o preço é maior)

→ Como o livre de risco é a única fonte de seguro, agentes estão dispostos a pagar mais por ~~ttos~~ ele. No mercado completo, ele é redundante, o que diminui a pressão no preço, aumentando juros.