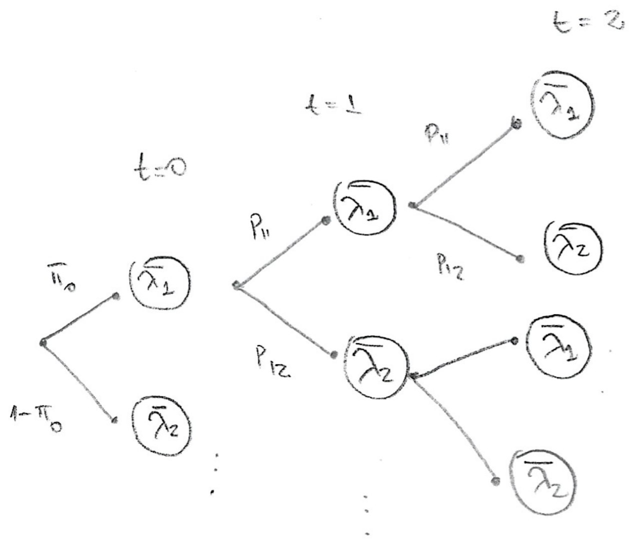
MONITORIA MACRO (IV) 29/10/21

LISTA (1)

(1) LS. (8.2) T.S.I.R

$$\underbrace{y_{t+1} = \lambda_{t+1}}_{\text{MARKOVIANO}} y_t \longrightarrow P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{22} & p_{22} \end{bmatrix} \; ; \; \pi_y = [\pi_0 \quad 1-\pi_0]$$

$$\lambda_t = \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = 0{,}98 \\ \bar{\lambda}_2 = 1{,}03 \end{cases} \; ; \quad \text{PREF: } E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \, , \quad u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$



(+) 1 ÚNICO CONSUMIDOR //

A) Def: Um equilíbrio competitivo é uma dotação inicial y_0, uma distribuição inicial π_λ, a alocação de consumo $\{c_t(\lambda^t)\}_{\forall t, \lambda^t}$, onde $\lambda^t = \{\lambda_t\}_{\forall t}$ é toda a história até o tempo t, e uma sequência de preços $\{q_t^0(\lambda^t)\}_{\forall t, \lambda^t}$ tais que:

- Dados y^0, π_λ, o consumidor resolve: $\max\limits_{c_t(\lambda^t)} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t) u(c_t(\lambda^t))$

  s.a: $\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) c_t(\lambda^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) y_t(\lambda^t)$

- Há market-clear: $c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t) \quad \forall t, \lambda^t$

b) Vamos montar o Lagrangeano do problema:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} \left\{ \beta^t \pi_t(\lambda^t) \frac{c_t(\lambda^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\} + \mu \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) \left[y_t(\lambda^t) - c_t(\lambda^t) \right] \right\}$$

→ só 1 ag. representativo
→ sem tempo (ARROW-DEBREU)

CPO: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t(\lambda^t)} = 0 \iff \beta^t \pi_t(\lambda^t) c_t(\lambda^t)^{-\gamma} - \mu q_t^0(\lambda^t) = 0$

Sabemos que, $\forall t$, $\boxed{c_t(\lambda^t) = y_t(\lambda^t)}$ (dado que $u(\cdot)$ é côncava)

Reescrevendo a CPO:

$$q_t^0(\lambda^t) = \frac{\beta^t \pi_t(\lambda^t) y_t(\lambda^t)^{-\gamma}}{\mu}$$

Normalizando $q_0^0(\lambda^0) = 1 \Rightarrow \underbrace{\beta^0 \pi_0(\lambda^0)}_{=1} c_0(\lambda^0)^{-\gamma} - \mu = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu = c_0(\lambda^0)^{-\gamma}$$

Substituindo

$$\boxed{q_t^0(\lambda^t) = \beta^t \pi_t(\lambda^t) \left[\frac{y_t(\lambda^t)}{y_0(\lambda^0)} \right]^{-\gamma}} \quad (1)$$

c) Com os dados do enunciado:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \qquad \pi_y = [0,5 \quad 0,5] \qquad \lambda' = [0,98 \quad 1,03]$$

$\beta = 0,96$

$y_0 = 1$

• Vamos obter a distribuição no período 1.

$$\pi_1 = \pi_0 P = [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix} = [0,475 \quad 0,525]$$

Vamos iterar para obter a $\sim$ no SS

$$\pi^* = \pi^* P \Rightarrow (\pi^* \quad 1-\pi^*) = (\pi^* \quad 1-\pi^*) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow (\pi^* \quad 1-\pi^*) = [0,8\pi^* + 0,15(1-\pi^*) \qquad 0,2\pi^* + 0,85\pi^*]$$

$$\pi^* = 0,8\pi^* + 0,15(1-\pi^*) \Rightarrow 0,2\pi^* = 0,15 - 0,15\pi^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,35\pi^* = 0,15 \Rightarrow \pi^* = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \pi^* = \left(\frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}\right)$$

Average growth rate of consumption: $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \lambda_t \xrightarrow{P} E_{\pi^*}(\lambda_t)$

$$\therefore E_{\pi^*}(\lambda_t) = \left(\frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}\right)\begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,03 \end{pmatrix} = \frac{2,94 + 4,12}{7} = \frac{7,06}{7} = \frac{706}{700} = \frac{353}{350}$$

//

D) Da (1), sabemos o preço de um ativo que paga uma unidade de consumo em um dado estado-período.

Generalizando, um ativo que paga $d_t(\lambda^t)$ custa:

$$p_t^0(\lambda^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) d_t(\lambda^t)$$

Assim, o preço de um título que paga uma unidade de consumo em todo estado ($d_t(\lambda^t) = 1$), em um dado t é:

$$Q_t^0(\lambda^t) = \sum_{\lambda^t} q_t^0(\lambda^t) = \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi_t(\lambda^t) \left[\frac{y_t(\lambda^t)}{y_0(\lambda^t)}\right]^{-\gamma}$$

Sabemos do texto que $y_t = \lambda_t y_{t-1}$. Assim:

$$y_1 = \lambda_1 y_0$$
$$y_2 = \lambda_2 y_1 = \lambda_2 \lambda_1 y_0$$
$$y_t = \lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 y_0$$

$$\therefore Q_t^0 = \sum_{\lambda^t} \beta^t \pi(\lambda_t|\lambda_{t-1}) \pi(\lambda_{t-1}|\lambda_{t-2}) \cdots \pi(\lambda_2|\lambda_1) \overbrace{\pi(\lambda_1|\lambda_0)}^{\pi_1} \left[\frac{\lambda_t \lambda_{t-1} \cdots \lambda_1 \, 1}{1}\right]^{-\gamma}$$

Assim, o preço do título em cada t será:

$\underline{t=0}$

$$Q_0^0(\lambda^0) = \sum_{\lambda_0} \beta^0 \frac{\pi^0(\lambda^0) y_0(\lambda^0)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = 1 \longrightarrow$$

O estado $\bar{\lambda}_1$ em $t=0$ é certo, uma unidade de consumo custa precisamente uma unidade de consumo.

$\underline{t=1}$

$$Q_1^0(\lambda^1) = \sum_{\lambda^1} \beta \frac{\pi_1(\lambda^1) y_1(\lambda^1)^{-\gamma}}{\underbrace{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}}_{=1}} = \beta\left[P_{11}(\bar{\lambda}_1)^{-\gamma} + P_{12}(\bar{\lambda}^2)^{-\gamma}\right] = 0{,}98$$

$\underline{t=2}$

$$Q_2^0(\lambda^2) = \sum_{\lambda^2} \frac{\beta^2 \pi_2(\lambda^2) y_2(\lambda^2)^{-\gamma}}{\underbrace{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}}_{=1}} = \beta^2\left[P_{11}^2 (\bar{\lambda}_1^2)^{-\gamma} + P_{11}P_{12}(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2)^{-\gamma} + P_{12}P_{22}(\bar{\lambda}_2^2)^{-\gamma} + P_{12}P_{21}(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2)^{-\gamma}\right] = 0{,}95$$

E) Definimos: $\bar{\Lambda}_1 \equiv$ conjunto de todos os estados $\lambda_j = \bar{\lambda}_1$

$\bar{\Lambda}_2 \equiv$ " " " " " $\lambda_j = \bar{\lambda}_2$

Queremos: $$ {}_1Q^0_t(\lambda^t) = \sum_{\lambda^t \in \bar{\Lambda}_1} \beta^t \pi_t(\lambda^t) \frac{y_t(\lambda^t)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} $$

$t=0$ $$ {}_1Q^0_0(\lambda^0) = \sum_{\lambda^0 \in \bar{\Lambda}_1} \beta^0 \frac{\pi_0(\lambda^0) y_0(\lambda^0)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = 1 \longrightarrow \bar{\lambda}_1 $$

$t=1$ $$ {}_1Q^0_1(\lambda^1) = \sum_{\lambda^1 \in \bar{\Lambda}_1} \beta \frac{\pi_1(\lambda^1) y_1(\lambda^1)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = \beta \cdot \left[P_{11} \bar{\lambda}_1^{-\gamma} \right] \cong 0,80 $$

$t=2$ $$ {}_1Q^0_2(\lambda^2) = \sum_{\lambda^2 \in \bar{\Lambda}_1} \beta^2 \frac{\pi_2(\lambda^2) y_2(\lambda^2)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = \beta^2 \left[P_{11}^2 (\bar{\lambda}_1^2)^{-\gamma} + P_{12} P_{21} (\bar{\lambda}^2 \bar{\lambda}_2)^{-\gamma} \right] = 0,67 $$

F) Queremos: $$ {}_2Q^0_t(\lambda^t) = \sum_{\lambda^t \in \bar{\Lambda}^2} \beta^t \frac{\pi_t(\lambda^t) y_t(\lambda^t)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^t)^{-\gamma}} $$

$t=0$ $$ {}_2Q^0_0(\lambda^0) = \sum_{\lambda_0 \in \bar{\Lambda}_2} \beta^0 \frac{\pi_0(\lambda^0) y_0(\lambda^0)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = 0 $$

Ese estado não acontece. Quem compraria um ativo que somente paga num estado que não ocorre?

$t=1$ $$ {}_2Q^0_1(\lambda^1) = \sum_{\lambda_1 \in \bar{\Lambda}_2} \beta \frac{\pi_1(\lambda^1) y_1(\lambda^1)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = \beta \left[P_{12} \bar{\lambda}_2^{-\gamma} \right] \cong 0,18 $$

$t=2$ $$ {}_2Q^0_2(\lambda^2) = \sum_{\lambda_2 \in \bar{\Lambda}_2} \beta^2 \frac{\pi_2(\lambda^2) y_2(\lambda^2)^{-\gamma}}{y_0(\lambda^0)^{-\gamma}} = \beta^2 \left[P_{11} P_{12} (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2)^{-\gamma} + P_{12} P_{22} (\bar{\lambda}_2^2)^{-\gamma} \right] $$

$= 0,28$

9) Note que:

$$Q^0_0(\lambda^t) = {}_1Q^0_0(\lambda^t) + {}_2Q^0_0(\lambda^t)$$
$$Q^0_1(\lambda^t) = {}_1Q^0_1(\lambda^t) + {}_2Q^0_1(\lambda^t)$$
$$Q^0_2(\lambda^t) = {}_1Q^0_2(\lambda^t) + {}_2Q^0_2(\lambda^t)$$

Note tb que: ${}_1Q^0_t(\lambda^t)$ é decrescente no tempo, ao passo que ${}_2Q^0_t(\lambda^t)$ é crescente no tempo.

→ Como vimos na parte (c), a probabilidade de estar no estado 2 aumenta com o tempo. Assim, o vendedor desse título deve levar isso em consideração

Por que "Estrutura a termo das taxas de juros?"

→ Em linhas gerais, o preço é o inverso da taxa de juros.

No caso Risk-Free (D):

$$1 + Rf_t = \frac{1}{Q_t} \Rightarrow \quad Rf_0 = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$Rf_1 = \frac{1}{0{,}98} - 1 \cong 2{,}04\%$$

$$Rf_2 = \frac{1}{0{,}95} - 1 \cong 5{,}2\%$$