# Teorema Valor médio para integrais

**Def.** Chamamos média de uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a quantidade

$$\mu(f) = \int_a^b f \Big/ (b-a) \qquad \text{qdo. } f \text{ é integrável.}$$

**Teo.** Qdo $f$ é contínua, $\exists\ c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

**OBS:** Nesse caso $f(c) = \mu(f)$.

**dem.** $f$ contínua $\rightsquigarrow \exists\ m, M$ tq. $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$:

$m = \min f$ e $M = \max f$ em $[a,b]$.

Daí $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) \rightsquigarrow m \leq \int_a^b f \Big/ (b-a) \leq M$.

i.e. $\int_a^b f \Big/ (b-a) \in$ Imagem de $f$ !!!

Pelo TVI $\exists\ c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = \int_a^b f \Big/ (b-a)$. $\blacksquare$

Corolário: Assuma $f$ e $g$ contínuas em $[a,b]$. Se $g$ nunca muda de sinal em $[a,b]$, então para algum $c \in [a,b]$ temos

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Teo. do Valor médio com pesos

dem. Spg que $g(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Sejam como antes

$$m = \text{mín} f \quad \text{e} \quad M = \text{máx} f \text{ em } [a,b].$$

Assim $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x)$.

Daí $m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$

$\rightsquigarrow m \leq \int_a^b fg \Big/ \int_a^b g \leq M$ (suponha que $g \not\equiv 0$)

$\uparrow$ $g \equiv 0$ é trivial.

$\therefore \int_a^b fg \Big/ \int_a^b g \in$ Imagem de $f$

Pelo TVI, $\exists\, c \in [a,b]$ tq. $f(c) = \int_a^b fg \Big/ \int_a^b g$. $\blacksquare$

Cap. 3. Seção 3.20: 1, 6, 7 e 8.

Quinta: 04/10 aula de exercício (Patrícia)