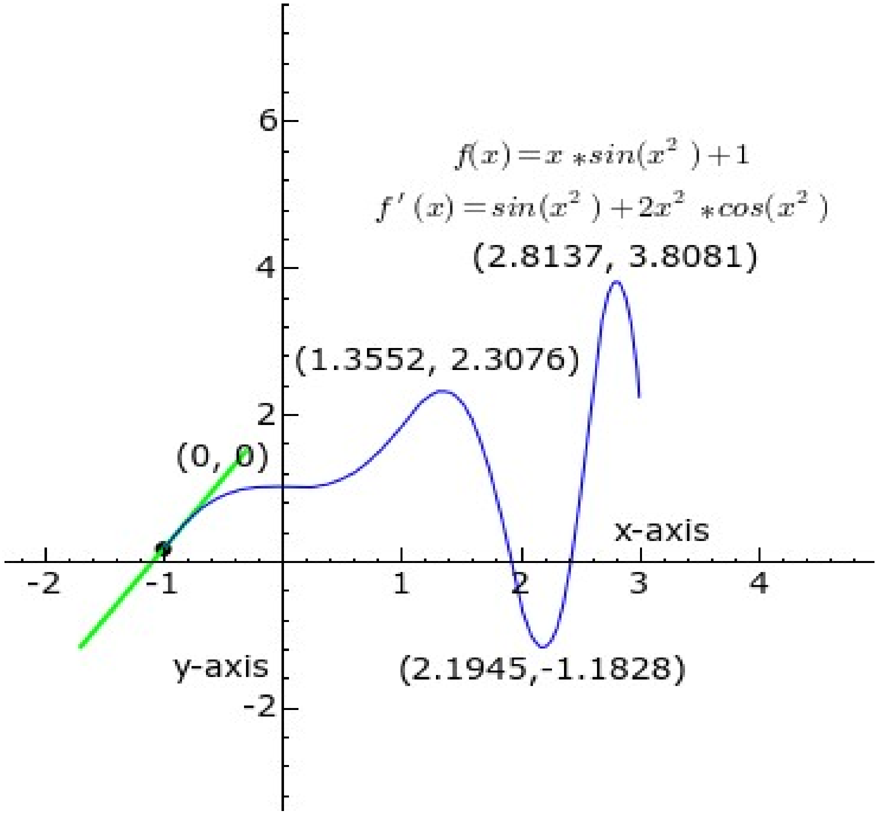
Tópicos Especiais de Matemática Aplicada a Projetos Educacionais

Mestrado Profissional – PPGPE

Profa. Roberta Veloso Garcia

Aula 4: Função Derivada



Sequência Didática da aula

- Conteúdos: Função Derivada

- Objetivos:

- Calcular TVM;
- Calcular a TVI;
- Intuitivamente chegar ao conceito de derivada
- Interpretação geométrica

- Recursos Utilizados: - Internet
  - Tablet

- Aplicativos Utilizados: -Geogebra
  - Excel

- Etapas para a Realização:
  - Teoria apresentada com GeoGebra,
  - Teste Avaliativo

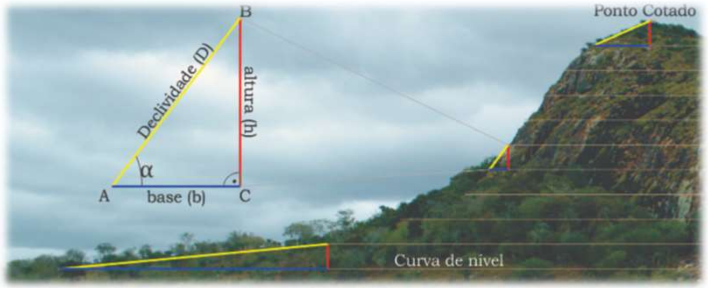
Motivação:

- A derivada de uma função em um determinado ponto nos diz sobre a taxa à qual o valor da função está variando naquele ponto: Taxa de Variação Instantânea

Velocidade de um satélite no espaço: taxa de variação do espaço percorrido em relação ao tempo.

Lucro máximo de uma empresa:
Otimizar situações

Taxa de crescimento de uma colônia de fungos



Declividade de curvas ou superfícies

No Ensino Médio...

- O ensino de Cálculo já fez parte dos currículos do Ensino Médio (antes chamado Ensino Secundário). Tal tema foi incluído através da reforma de Capanema, em 1942.

- Conceitos importantes de Cálculo que fundamentam assuntos como a variabilidade das funções, máximos e mínimos de funções, intervalos de crescimento e decrescimento, vértices de parábolas, etc.

- Atualmente diversos artigos discutem a importância do Cálculo Diferencial e Integral (sem o rigor e formalismo do Ensino Superior) na Ensino Médio.

4.1 Taxa de Variação: A Derivada

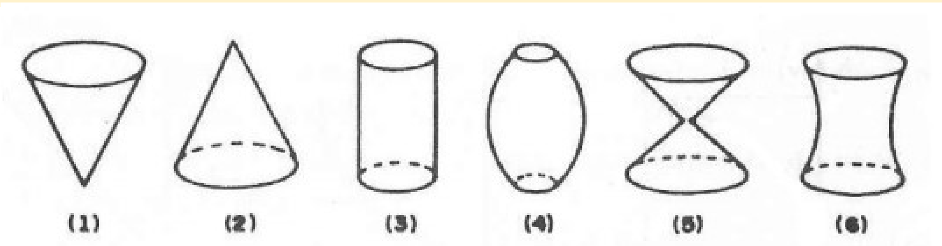
(I) A Variação das Funções

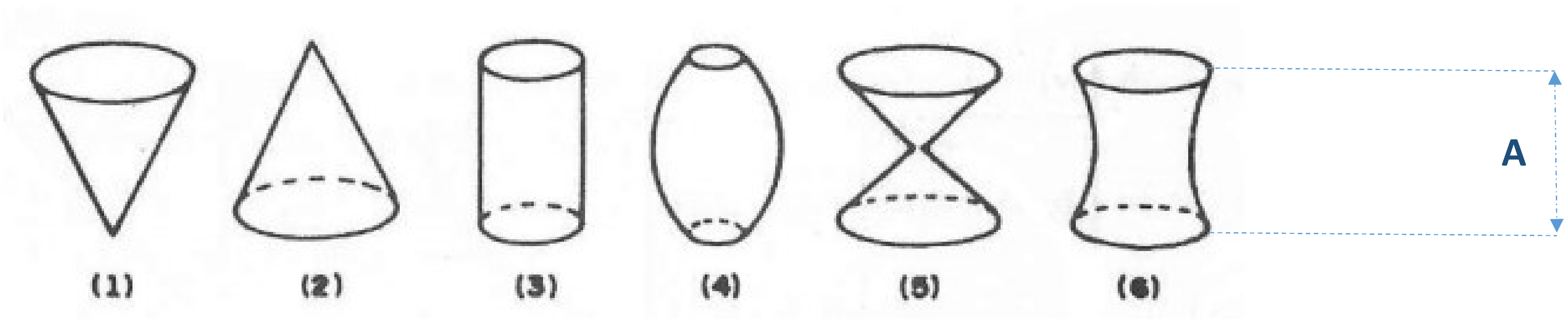
- A idéia de variação de uma função está relacionada com o seu comportamento (crescimento, decrescimento ou estabilidade) num determinado intervalo do seu domínio.
- **Exemplo 1**:

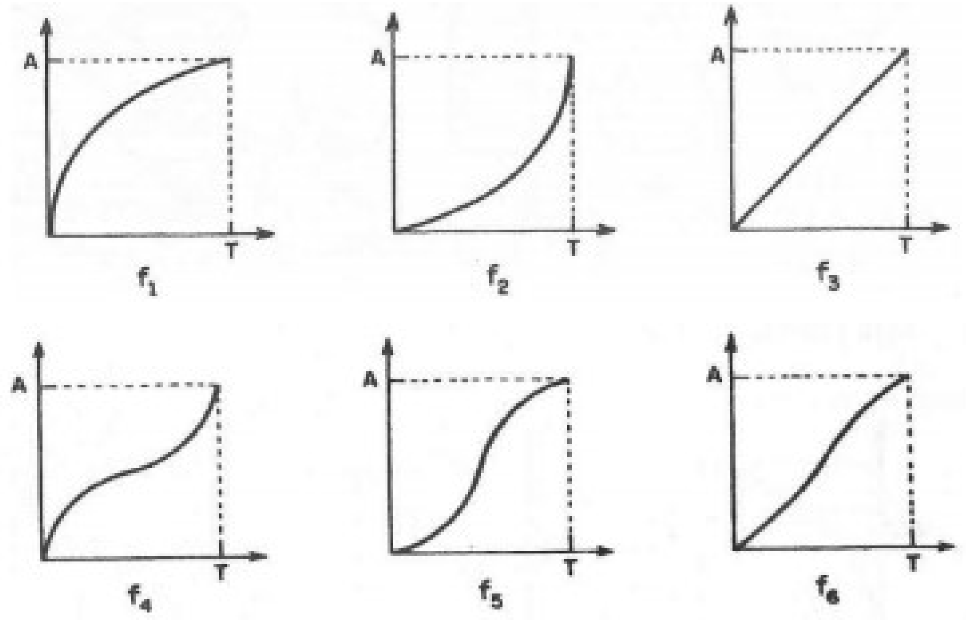
Considere os reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura. Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão da água é a mesma para todos eles, constante e igual a k metros cúbicos por minuto.

Queremos analisar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo.

- Seja *fi* (t) a altura do nível de água no instante t (i 1,2,3,4,5,6 conforme o reservatório); vamos medir a altura em metros e o tempo em minutos.
- Temos: *fi* (0) = 0 e *fi* (T) = A, onde A é a altura dos reservatórios e T é o tempo necessário para enchê-los.







Variação da altura em relação ao tempo

(II) Taxa de Variação Média (TVM) de funções

- O conceito de taxa de variação média está na base do estudo de funções e exprime a razão com que a função cresce num dado intervalo do domínio.

Exemplo 2 : A tabela mostra a porcentagem da população dos EUA morando em área urbana como função do ano.

$U = f(t)$

Ano	1800	1830	1860	1890	1920	1950	1960	1970	1980
% Urbana	6	9	20	35	51	64	69,9	73,5	73,7

Quanto a população variou em média de 1800 à 1890? $\boldsymbol{TVM} = \frac{35-6}{1890-1800}$ = 0,32 % ao ano

Quanto a população variou em média de 1890 à 1960? $\boldsymbol{TVM} = \frac{69{,}9-35}{1960-1890}$ = 0,50 % ao ano

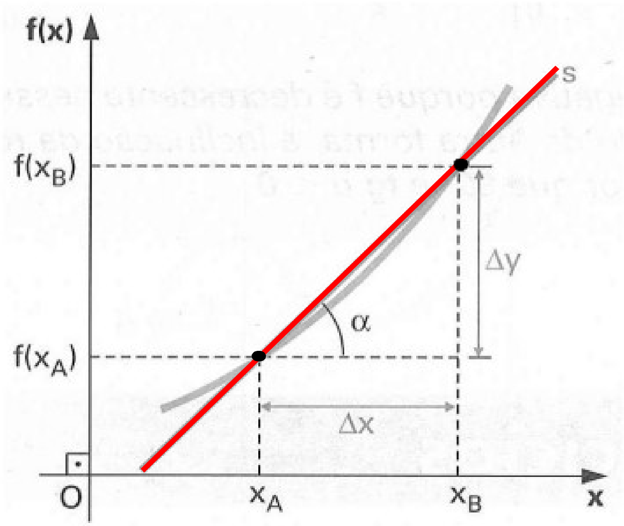
- **Generalizando** para qualquer função contínua $y = f(x)$, podemos dizer que a **TVM no intervalo** $[x_A, x_B]$**, com** $x_A < x_B$ é calculada por:

$$TVM = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Variável dependente

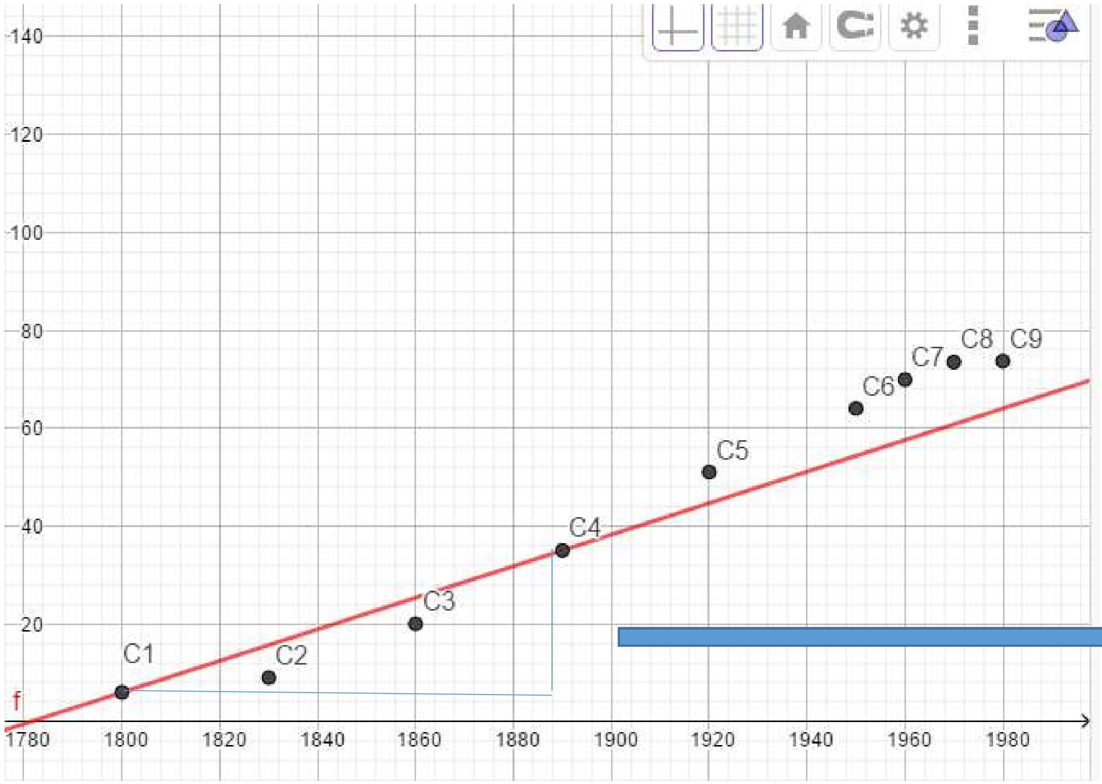
Variável independente

- **Geometricamente** a TVM pode ser interpretada como o coeficiente angular "*m*" (ou inclinação) da reta *s* que cruza o gráfico da função $f(x)$ nos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



$$m = tg(\alpha) = TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No exemplo 2 anterior sobre a população em área urbana nos EUA...



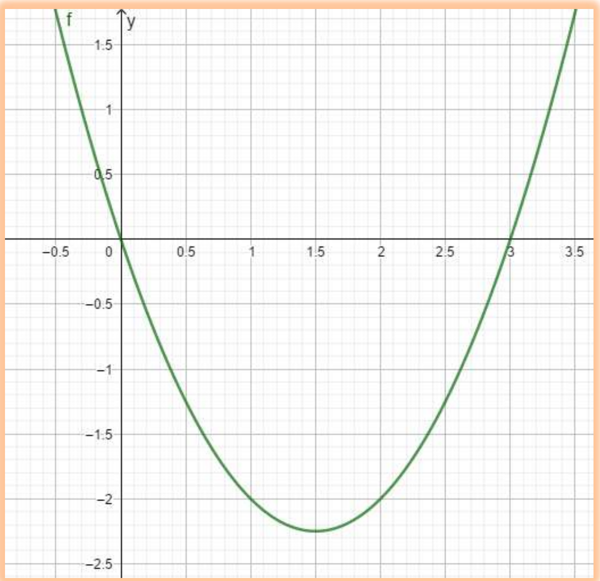
Mas a TVM não nos dá informações precisas sobre a curva ou sobre a função quando consideramos intervalos de tempo muito grandes!

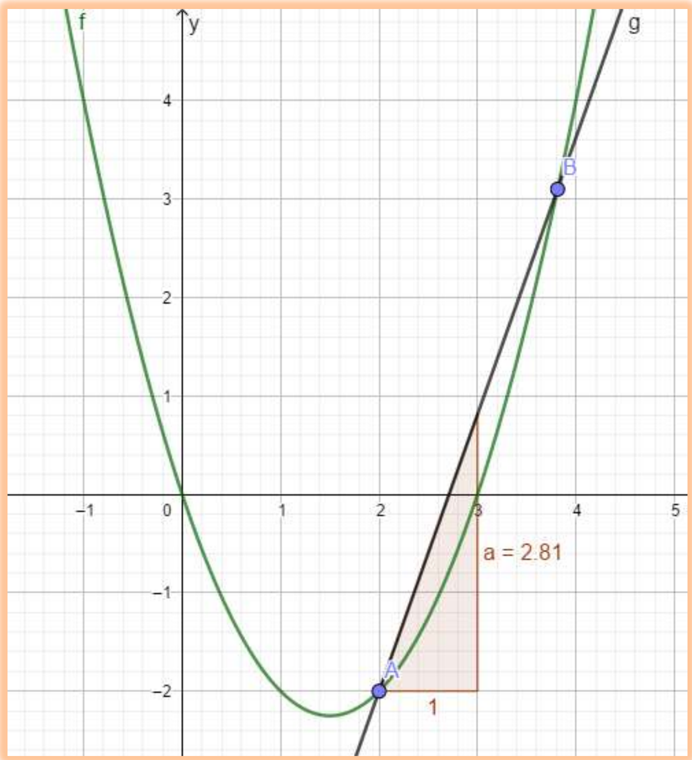
Note que entre os pontos C1 e C2 a função teve um crescimento mais lento!

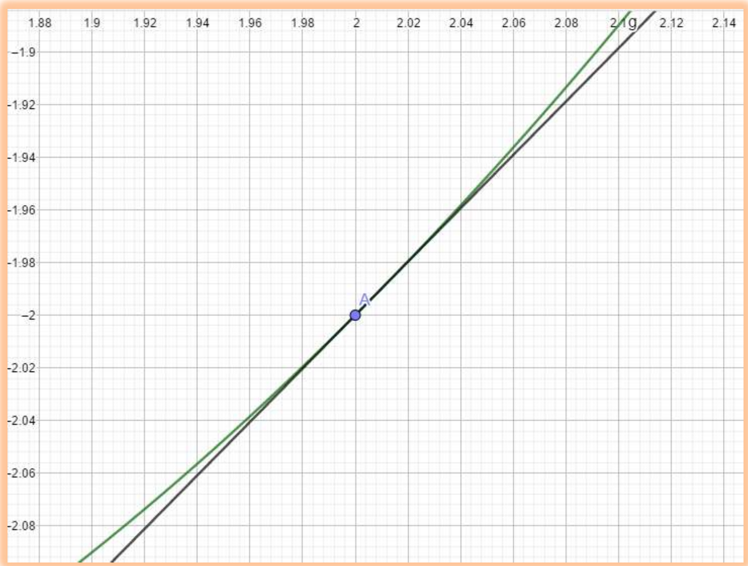
TVM= m = 0,32

Pergunta: O que podemos fazer para ter informações mais precisas sobre o comportamento da função?

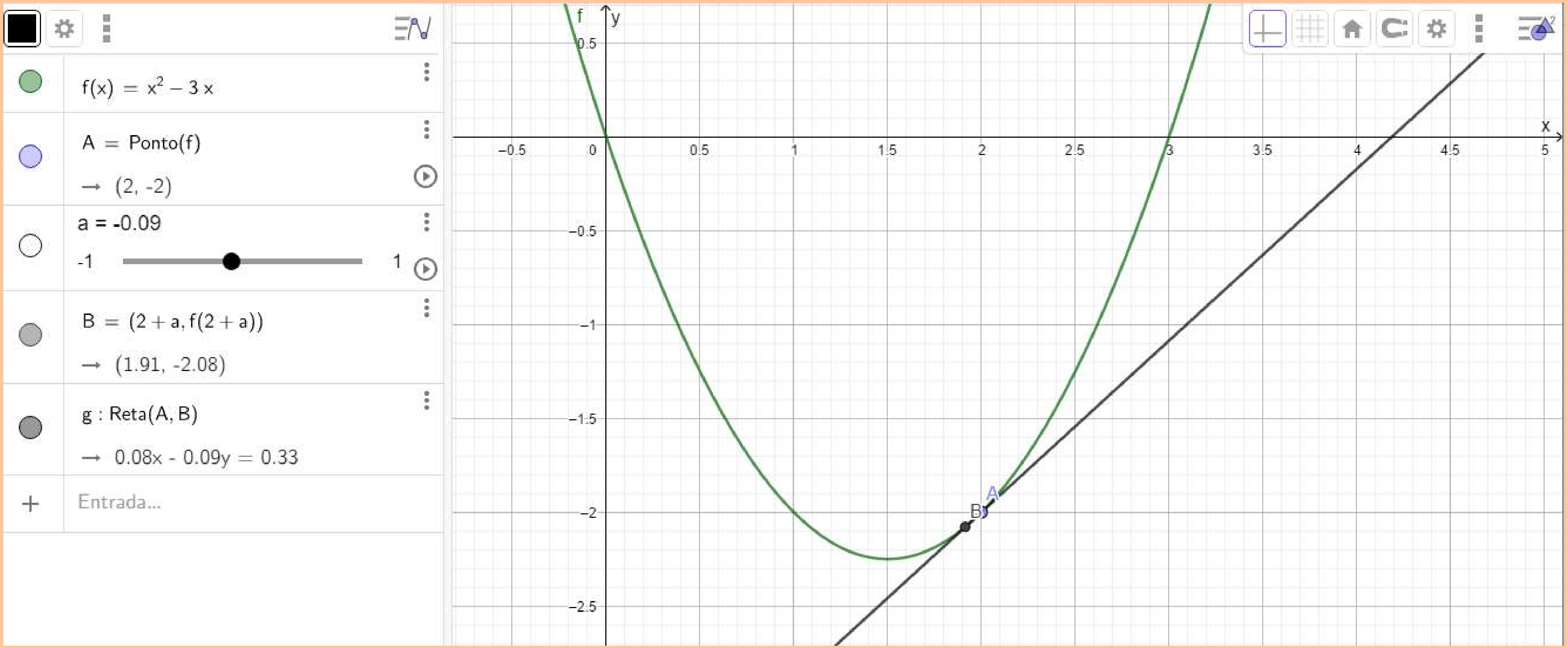
Seja uma função y=f(x) representada pelo gráfico abaixo e o ponto A(2, f(2)).







Geogebra:



f(x) = x² − 3 x
A = Ponto(f)
→ (2, -2)
a = -0.09
-1
1
B = (2 + a, f(2 + a))
→ (1.91, -2.08)
g : Reta(A, B)
→ 0.08x - 0.09y = 0.33
Entrada...
f
y
x
A
B

(III) Taxa de Variação Instantânea (TVI) de funções

- A TVI nos fornece a taxa com que a função varia a partir de um ponto específico.

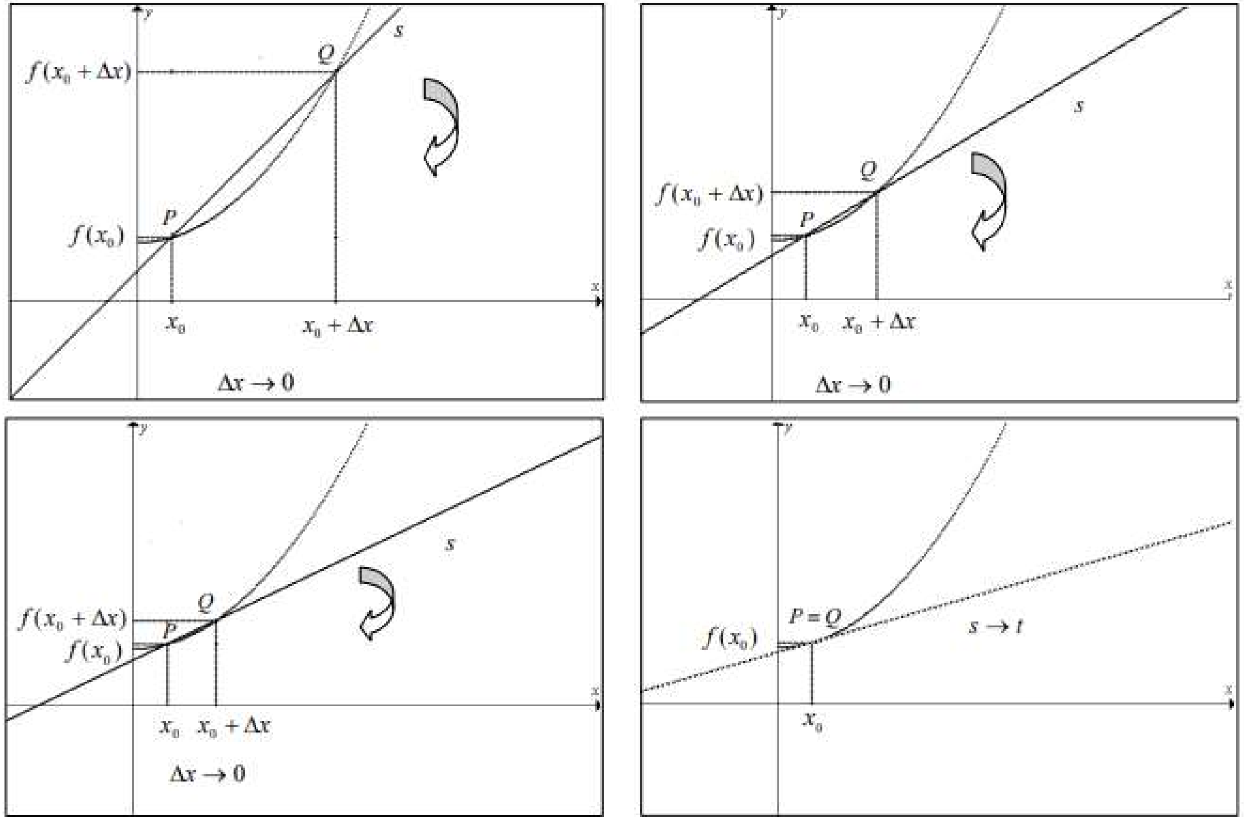


Figura 26: reta secante → reta tangente

$$TVI = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$

Geometricamente: inclinação da reta tangente

(IV) A Derivada de Funções

- A taxa de variação instantânea (TVI) da função y = $f(x)$ em x_0 chamamos de derivada da função em relação à variável x em x_0 e representamos por $f'(x_0)$.
- Geometricamente, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente no ponto considerado.
- De outra forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \boxed{TVI = f\,'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$$

Exemplo 3: Qual a derivada da função f(x) = x^2 ?

Derivada da $f(x)$ é :

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \to 0 \quad (\Delta x \sim 0)$$

Substituindo $f(x) = x^2$ na derivada :

$$f'(x) = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \to 0$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x^2} + 2.x.\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \to 0$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{\Delta x}\,(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \quad , \quad \Delta x \to 0$$

$$f'(x) = 2x + \Delta x \quad , \quad \Delta x \to 0$$

Fazendo $\Delta x \sim 0$: $\boxed{f'(x) = 2x}$

Exemplo 4: A tabela nos dá valores de C(t), a concentração (mg/cc) de uma droga na corrente sanguínea ao tempo t (min).

t	c(t)
0	0,84
0,1	0,89
0,2	0,94
0,3	0,98
0,4	1
0,5	1
0,6	0,97
0,7	0,9
0,8	0,79
0,9	0,63
1	0,41

a. Calcule a TVM da concentração da droga no intervalo de tempo [0, 0.8].

b. Calcule o valor estimado para C'(t) no instante 0,3min

Exemplo 4: Solução

a. Calcule a TVM da concentração da droga no intervalo de tempo [0, 0.8].

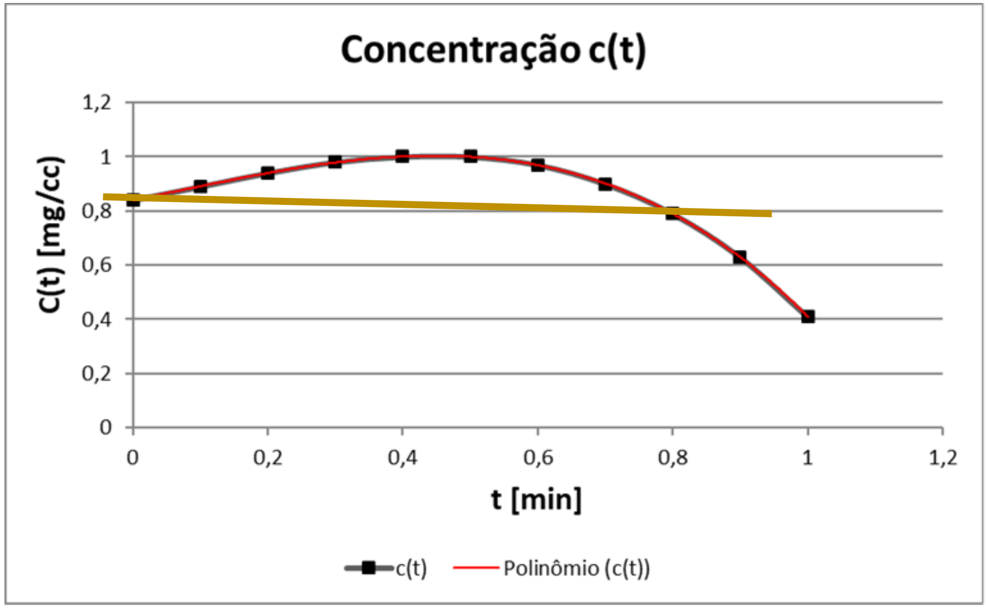
t	c(t)
0	0,84
0,1	0,89
0,2	0,94
0,3	0,98
0,4	1
0,5	1
0,6	0,97
0,7	0,9
0,8	0,79
0,9	0,63
1	0,41

$$TVM = \frac{c(0,8) - c(0)}{0,8 - 0}$$

$$TVM = \frac{0,79 - 0,84}{0,8}$$

$$TVM = \frac{-0,05}{0,8}$$

$$TVM = -0,0625$$



Exemplo 4: Solução

b. Calcule o valor estimado para C'(t) no instante 0,3min.

t	c(t)
0	0,84
0,1	0,89
0,2	0,94
0,3	0,98
0,4	1
0,5	1
0,6	0,97
0,7	0,9
0,8	0,79
0,9	0,63
1	0,41

$\underline{TVI = C'(t)} \Rightarrow C'(t) = \dfrac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t}, \; \Delta t \sim 0$

Em 0,3 min :

$$C'(0{,}3) = \frac{C(0{,}3 + \Delta t) - C(0{,}3)}{\Delta t}, \quad \Delta t \sim 0$$

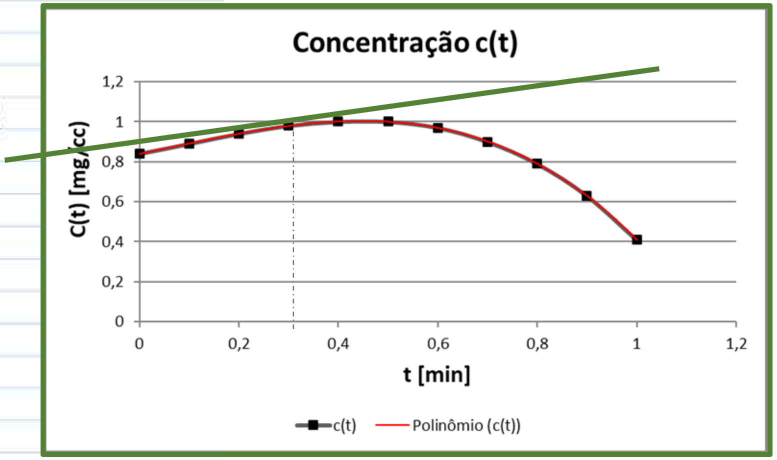
mas o menor intervalo que temos para Δt é 0,1 min. Então:

$$C'(0{,}3) \approx \frac{C(0{,}3 + 0{,}1) - C(0{,}3)}{0{,}1}, \quad \Delta t = 0{,}1 \; (\sim 0)$$

$$C'(0{,}3) \approx \frac{C(0{,}4) - C(0{,}3)}{0{,}1}, \quad \Delta t = 0{,}1 \; (\sim 0)$$

$$C'(0{,}3) \approx \frac{1 - 0{,}98}{0{,}1}, \quad \Delta t = 0{,}1 \; (\sim 0)$$

$$C'(0{,}3) \approx 0{,}2 \; \text{mg/cc}/\text{min}$$



4.2 Teste Conceitual A4

1. O lixo sólido gerado cada ano pelas cidades nos EUA vem crescendo. Valores para o lixo (em milhões de toneladas) como função do ano são dados na tabela a seguir.

a. Calcule a TVM do lixo no período entre [1960; 1975];
b. Calcule a derivada (TVI) do lixo no ano de 1965.

Ano	Lixo
1960	82,3
1965	98,3
1970	118,3
1975	122,7
1980	139,1
1984	148,1

2. Seja a função $f(x) = 5x + 2$. (a) Determine a função derivada de $f(x)$. (b) O resultado obtido para $f'(x)$ foi esperado? Justifique.