Função Diferenciável

Obs. importante: Este tópico deverá ser complementado com a leitura do Guidorizzi (Vol. 2), capítulo 11 pág. 189.

De acordo com o exemplo apresentado da aula de 21/10

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verificou-se que f não era contínua em (0,0), porém, as derivadas parciais existiam, $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$.

Portanto a f tem derivadas parciais no (0,0) mas não é contínua em (0,0). E este comportamento admite que as derivadas parciais não tem a mesma consequência apresentada no Cálculo I.

Considere:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\boxed{h = x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

$$\boxed{k = y - y_0}$$

Como a f(x,y) apresentada acima $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

No entanto, essa função não é contínua em (0,0), e o fato de ser derivável em x e y não é condição suficiente para ser contínua. Em Cálculo I se uma função de uma variável tem derivada num determinado ponto, será contínua nesse ponto. Então a existência das derivadas parciais não garantem a CONTINUIDADE da função.

Então,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{} \Rightarrow \text{É um } \underline{\text{conceito fraco}} \text{ para garantir a continuidade da função.}$$

$\longrightarrow$ Essa condição não é suficiente para garantir a continuidade

Estudaremos outro conceito que exige mais da função em relação a existência das derivadas parciais num ponto, mas o que queremos é garantir o Teorema, se f é diferenciável então f é contínua.

No Cálculo I a função $y = f(x)$ que é derivável em x_0 se existir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \underbrace{a}_{\text{nº real}}$$

No caso para a função com duas variáveis, consideramos (h, k)

Na relação apresentada acima não será dividido por pares, mas sim por número.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0$$

A partir desta expressão, será definida uma expressão com 2 variáveis diferenciáveis em um ponto.

O conceito de diferenciabilidade é importante no Cálculo II: f é diferenciável em (x_0,y_0) se existirem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-ah-bk}{|(h,k)|}$$

$$E(h,k) = f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk$$

$$E(h,k) = f(x_0+h,y_0+k) - \underbrace{\left[f(x_0,y_0)+ah+bk\right]}_{\text{Eq. do plano tangente}} \qquad (1)$$

Teorema 1:

Se f é diferenciável em (x_0,y_0) então f é contínua em (x_0,y_0).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0)$$

Na expressão (1) tem-se:

$$E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - [f(x_0,y_0) + ah + bk]$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{ah + bk}_{①} + \underbrace{E(h,k)}_{②}$$

① $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} ah + bk = 0$

② $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{E(h,k)}{|(h,k)|}$ $\quad |h,k| = \sqrt{h^2+k^2}$, quando $h\to 0$, $k\to 0$ $\sqrt{h^2+k^2} = 0$

Portanto aplicando o limite na expressão acima, tem-se:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$$

Teorema 2

$A \subset \mathbb{R}^2$ (aberto)

$(x_0,y_0) \in A$

$f: A \to \mathbb{R}$

Se f for diferenciável em (x_0,y_0) então existem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Demonstração

Considerando $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$

Sendo $f(x,y)$ diferenciável em (x_0,y_0), existem a e b tais que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{|(h,k)|} \qquad (2)$$

Como $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,y_0) - ah - b.0}{|(h,0)|} \qquad k=0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{h} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} - a = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - a = 0 \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a}$$

Desta forma foi provado que $\frac{\partial f}{\partial x} = a$.

Calculando o lim (2) e considerando $h=0$, determina-se que:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b}$$

Conclusão

$A \subset \mathbb{R}^2$
$(x_0, y_0) \in A$
f é diferenciável (em x_0, y_0) se e somente se f admitir derivadas parciais em (x_0, y_0)

$$\begin{cases} i) \ \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a \\ \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b \\ ii) \ \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{E(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}$$

Considere o exemplo:

a) Verificar se $f(x,y) = x^2 y$ é diferenciável em qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{2xy}_{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{x^2}_{b}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{|(h,k)|}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} = 0$$

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(x+h, y+k) - f(x,y) - 2xyh - x^2 k \\ &= (x+h)^2 \cdot (y+k) - x^2 y - 2xyh - x^2 k \\ &= (x^2 + 2xh + h^2) \cdot (y+k) - x^2 y - 2xyh - x^2 k \\ &= \cancel{x^2 y} + \cancel{x^2 k} + \cancel{2xyh} + 2xhk + h^2 y + h^2 k - \cancel{x^2 y} - \cancel{2xyh} - \cancel{x^2 k} \end{aligned}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + yh^2 + h^2 k}{|(h,k)|}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + yh^2 + h^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \overset{\to 0}{\cancel{2xk}}\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{ltda}} + \overset{\to 0}{\cancel{hy}}\cdot\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{ltda}} + \overset{\to 0}{\cancel{hk}}\cdot\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{ltda}} = 0$$

Portanto $f(x,y) = x^2 y$ é diferenciável.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} = 0$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b.1) Calcular as respectivas derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3}{h^2+0} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k}$$

$$\lim_{k\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

b.2) Verificar se a função é diferenciável.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\overset{\to 0+h}{h}, \overset{\to 0+k}{k}) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{\Rightarrow a=1}{a}h - \overset{\Rightarrow b=0}{b}k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\cancel{h^3} - \cancel{h^3} - hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}}_{G(h,k)}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{h^2+k^2} \cdot \lim_{(h,k)} \underbrace{\frac{-h\cdot k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{ltda}}$$

Nota: Para mostrar que o limite não existe

$$\lim_{t\to 0} G(t,t) = \frac{-t^{3}}{\sqrt{2t^2}\cdot 2t^2} = \frac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|}$$

Concluindo:

Se a função é diferenciável, será contínua.
Mas nem toda função contínua é diferenciável.
Esse exemplo a função é contínua, mas não é diferenciável em (0,0).

Teorema 3

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$, A aberto
Se $f: A \to \mathbb{R}$ tal que
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existem para todo $(x,y) \in A$ e são contínuas em (x_0,y_0). Então f é diferenciável em (x_0,y_0).

Considere o exemplo seguinte,

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$$

Verificar se f é diferenciável em todos os pontos do conjunto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2+y^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^4} \cdot 4y^3 = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$$

Com base no Teorema 3 podemos calcular as derivadas, quociente de 2 polinômios, então o denominador não se anula.

Portanto, a f é contínua em todos os pontos, ou seja no $\mathbb{R}^2$. Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções contínuas em $A \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que f é de classe C^1.

<u>Corolário</u> Se f é uma função de classe C^1 em A, então f é diferenciável em A.

Considere,

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ é de classe } C^1 \text{ em } A \\ \Downarrow \quad \not\Uparrow \\ f \text{ é diferenciável em } A \\ \Downarrow \quad \not\Uparrow \\ f \text{ é contínua em } A \end{array}}$$