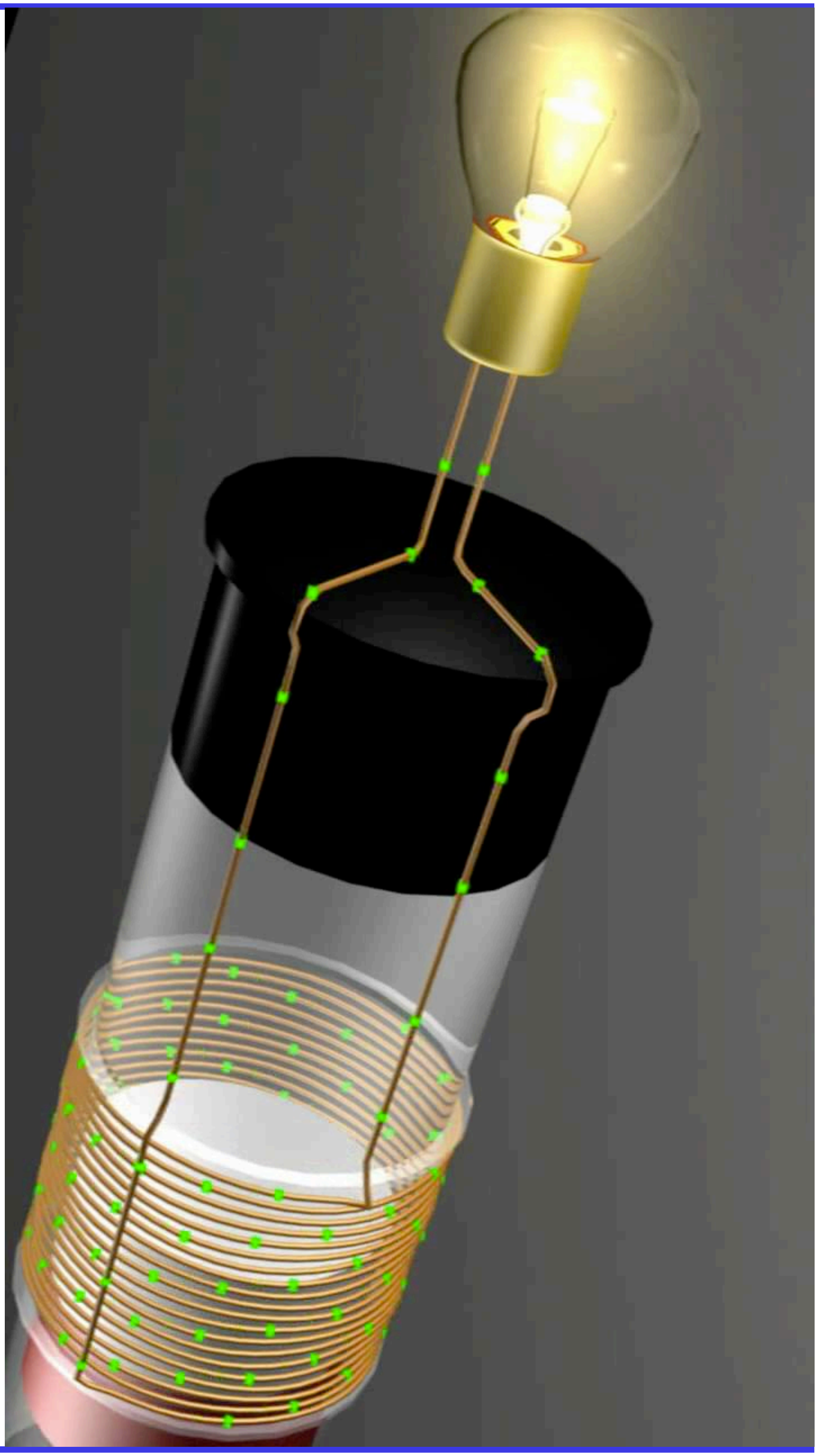
Indutância

⚡ Lei de Faraday: revisão
⚡ Indutância
⚡ Indutância mútua: exemplo
⚡ Auto-indutância: exemplo
⚡ Exemplos e aplicações: geradores, motores, etc. e tal



A Lei de Faraday

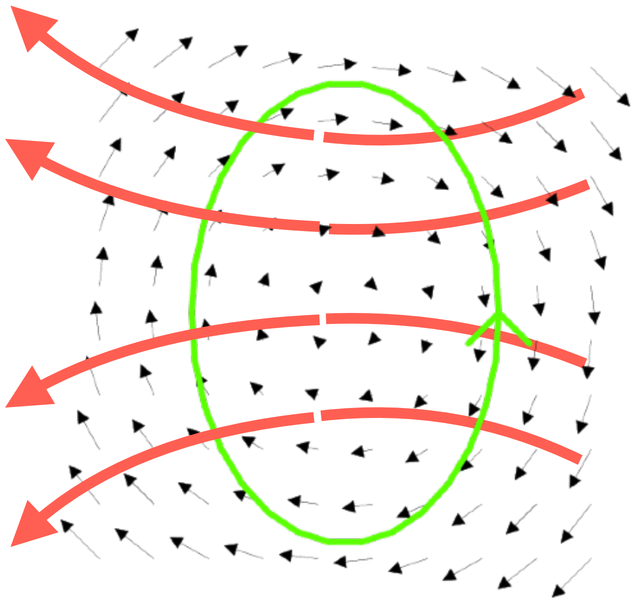
- Como vimos na aula passada, a lei de ***indução eletromagnética***, ou ***Lei de Faraday***, pode ser expressa de dois modos: em sua forma "global", ou integral, ela nos diz que:

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \vec{B} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Por outro lado, podemos usar o Teorema de Stokes para chegar a uma lei na forma local, ou diferencial:

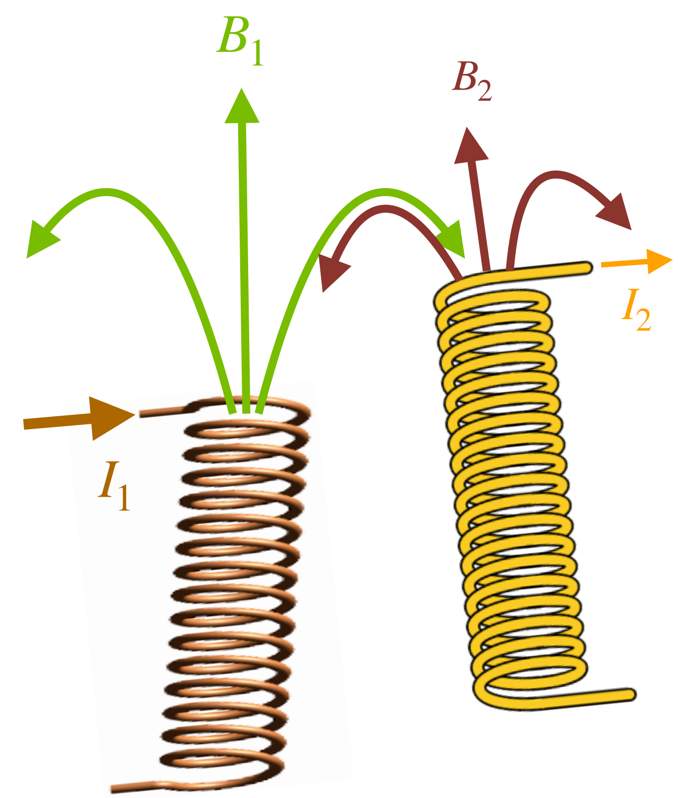
$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad .$$



- Em caso de dúvida num dado problema, é útil recorrer à forma diferencial da Lei de Faraday, e daí fazer as integrações necessárias.
- A Lei de Faraday nos diz que uma ***variação do campo magnético no tempo*** leva a uma ***circulação do campo elétrico***.

Indutância e auto-indutância



- A aplicação do princípio da Lei de Indução de Faraday nos leva a situações curiosas.
- Considere dois circuitos, como mostrado na figura.
- Se variamos a corrente em um deles (I_1), isso leva a uma variação do campo magnético (B_1)
- A mudança do campo magnético devido ao primeiro circuito altera o fluxo do campo dentro do ***segundo circuito***.
- Pela Lei de Lenz, o campo magnético induzido (B_2) ***se opõe*** ao campo que está causando a indução (B_1).
- Mas a própria corrente e campo induzidos no circuito 2 podem induzir uma resposta no primeiro circuito… e assim por diante…!
- A situação pode ser ainda mais complexa, porque qualquer circuito é feito de partes e pedaços, que podem induzir e sofrer indução das outras partes e pedaços.
- Quase sempre temos algum controle externo da situação: por exemplo, mantemos a corrente I_1 fixa, o que significa que qualquer "contra-reação" é compensada pela fonte da corrente I_1 trabalhando um pouco mais ou um pouco menos para manter essa corrente sob controle.
- Uma situação totalmente dinâmica pode ser muito difícil de resolver, e vamos ter de aguardar mais algumas semanas para poder atacar problemas dessa natureza.

Indutância e auto-indutância

- É mais fácil começar essa discussão sobre indutância com um cenário mais simples: dois solenóides coaxiais com os mesmos comprimentos (h), mas de tal forma que um está contido dentro do outro, como mostrado na figura.
- O solenóide de ***dentro***, de raio R_1 e seção $A_1 = \pi R_1^2$, tem N_1 voltas, enquanto o solenóide de ***fora***, de raio R_2, tem N_2 voltas.
- O campo magnético do solenóide ***exterior*** é:

$$B_2 = \frac{N_2}{h}\,\mu_0\, I_2 \qquad ,$$

o que leva a um fluxo total dentro do solenóide ***interior*** de:

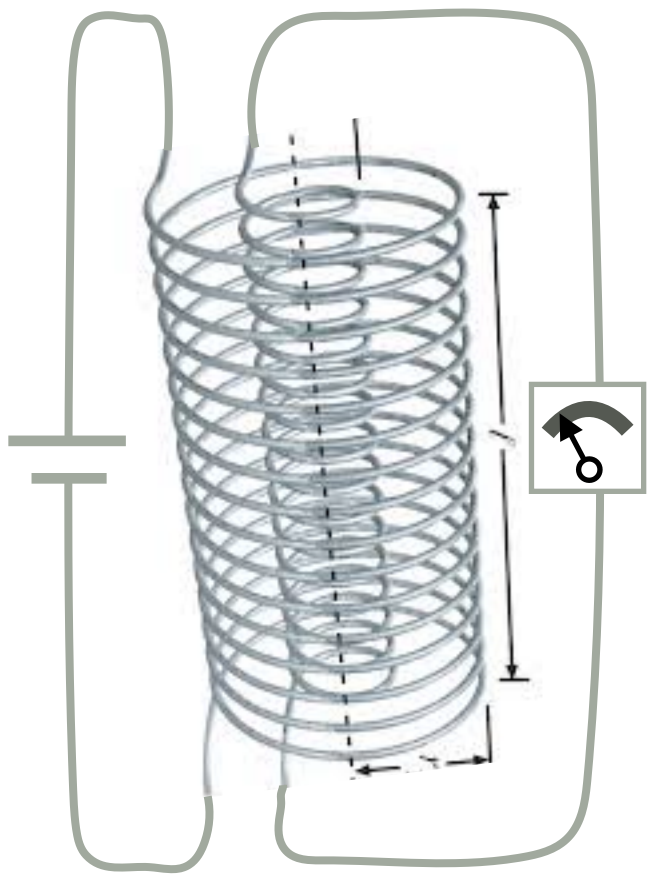
$$\Phi_{1\leftarrow 2} = N_1 A_1\; \mu_0 \frac{N_2}{h} I_2$$

- A constante de proporcionalidade entre ***corrente*** e ***fluxo*** é chamada de ***indutância***:

$$M_{1\leftarrow 2} = \mu_0\, A_1 \frac{N_1 N_2}{h}$$

- A indutância permite relacionar diretamente a força eletromotriz induzida num circuito (voltagem induzida) pela corrente que passa pelo outro circuito:

$$\mathscr{E}_{1\leftarrow 2} = -\, M_{1\leftarrow 2}\, \frac{dI_2}{dt}$$



Indutância e auto-indutância

- Podemos inverter a situação, e perguntar qual o campo magnético do solenóide ***interior***:

$$B_1 = \frac{N_1}{h}\,\mu_0\,I_1 \quad .$$

Mas a área ocupada por esse campo magnético ainda é A_1, e portanto o fluxo dentro do solenoide exterior é:

$$\Phi_{2\leftarrow 1} = N_2 A_1\,\mu_0 \frac{N_1}{h} I_1$$

- Note que as **indutâncias mútuas dos dois solenóides são idênticas**:

$$M_{2\leftarrow 1} = M_{1\leftarrow 2} \;=\; M \;=\; \mu_0\,A_1 \frac{N_1 N_2}{h}$$

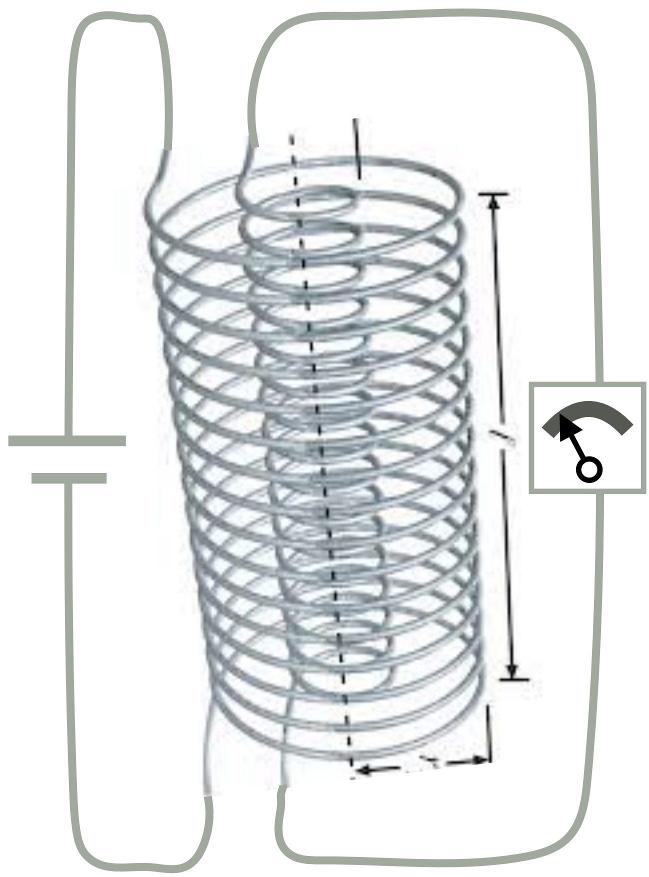
- Isso significa, portanto, que a força eletromotriz induzida no circuito 2 é dada por:

$$\mathscr{E}_{2\leftarrow 1} = -\,M\,\frac{dI_1}{dt}$$

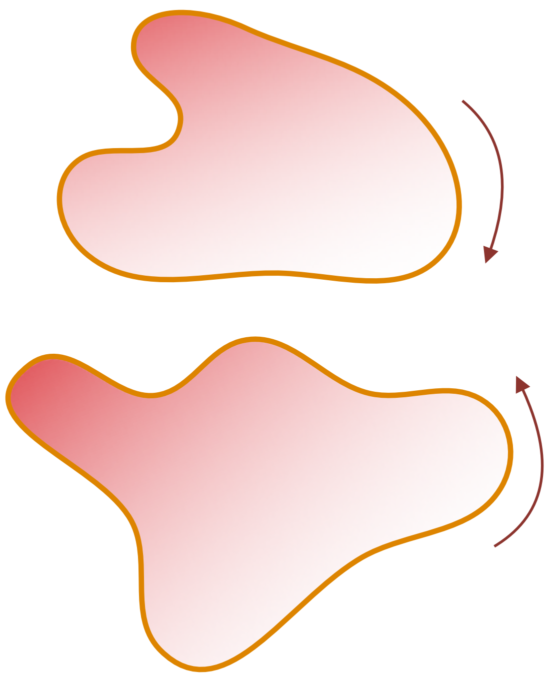
- Lembre-se do resultado que acabamos de encontrar:

$$\mathscr{E}_{1\leftarrow 2} = -\,M\,\frac{dI_2}{dt}$$

Isso de certa maneira resolve o problema que nos colocamos antes, e permite resolver sistemas “dinâmicos" em que dois circuitos induzem correntes um no outro. Veremos alguns exemplos interessantes quando discutirmos circuitos RLC.



Indutância e auto-indutância



- A indutância também pode ser formulada em termos do potencial-vetor
- O campo gerado por um circuito é dado por:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

- O fluxo do primeiro circuito através do segundo é dado por:

$$\Phi_{2\leftarrow 1} = \int d\vec{S}_2 \cdot \vec{B}_1 = \int d\vec{S}_2 \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \right) = \oint d\vec{l}_2 \cdot \vec{A}_1$$

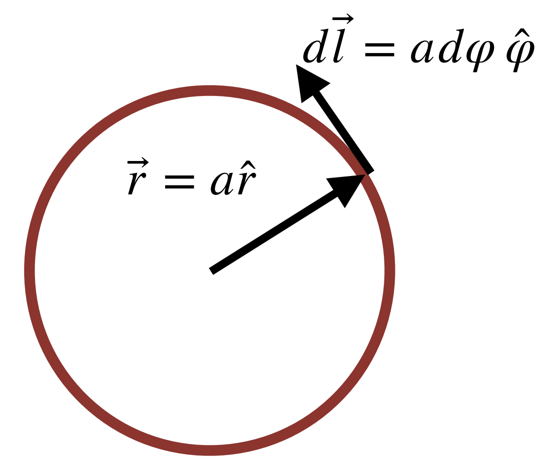
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \oint \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

- Mas se revertermos o exercício, vamos encontrar que o fluxo do segundo circuito através do primeiro é dado por uma expressão idêntica:

$$\Phi_{1\leftarrow 2} = = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- É óbvio, portanto, que a indutância mútua $L_{12} = \Phi_{1\leftarrow 2}/I_2 = \Phi_{2\leftarrow 2}/I_1 = L_{21}$. Essa é a chamada "fórmula de Neumann".
- Em situações realísticas, a indutância pode ser muito difícil de ser calculada — mas ela é facilmente ***medida***!

Indutância e auto-indutância

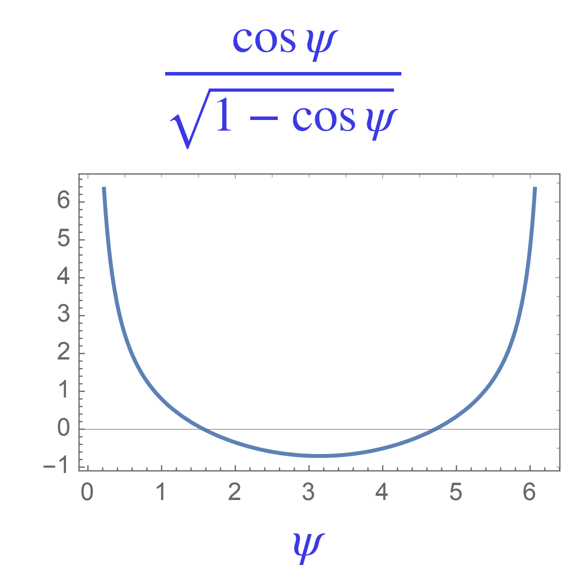


- Além da indutância mútua, um sistema pode apresentar auto-indutância consigo mesmo. Considere um circuito circular de raio a que vamos supor, por enquanto, ser infinitamente fino.
- A auto-indutância é expressa pela soma das indutâncias de cada parte em todas as outras, em termos da mesma integral dupla que encontramos agora há pouco:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint\frac{d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint\frac{(ad\varphi_1\hat{\varphi}_1)\cdot(ad\varphi_2\hat{\varphi}_2)}{|a\hat{r}_2-a\hat{r}_1|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{2\pi}d\varphi_2\frac{a^2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{a\sqrt{2-2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}$$



- Podemos fazer uma mudança de variáveis e usar $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\alpha = \varphi_2 + \varphi_1$. O segundo ângulo dá um fator de 2π , e como o Jacobiano da transformação é $1/\sqrt{2}$, obtemos:

$$L = \frac{\mu_0}{4}a\int_0^{2\pi}d\psi\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\cos\psi}}$$

Porém, se analisarmos com cuidado essa integral… veremos que ela diverge!!

Indutância e auto-indutância

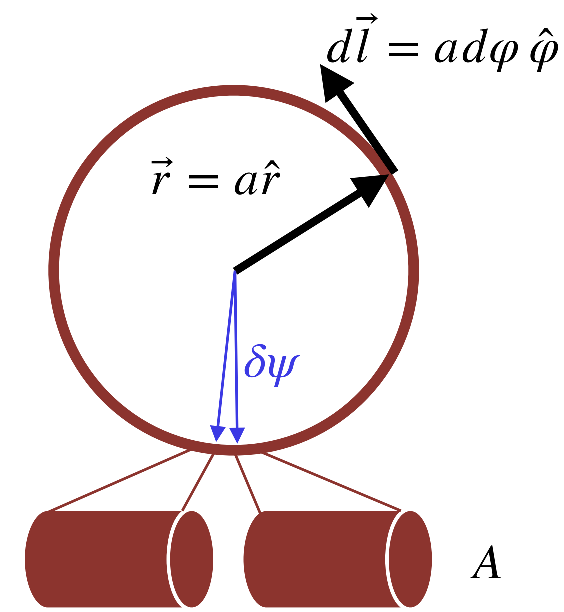
- O problema aqui é que trabalhamos sob a hipótese de que o fio é infinitamente fino, ao invés de admitir que qualquer fio teria uma seção finita. Vamos supor agora que essa seção do fio tem uma área $A \ll a^2$.
- Se quisermos fazer um cálculo rigoroso, vamos nos deparar com uma integral elíptica (!!).
- Entretanto, podemos obter um resultado qualitativamente idêntico se fizermos uma "regularização" dos limites $\psi \to 0$ and $\psi \to 2\pi$ na integral anterior. De fato, olhando de perto para o fio e sua seção, podemos estimar o tamanho desse ângulo:

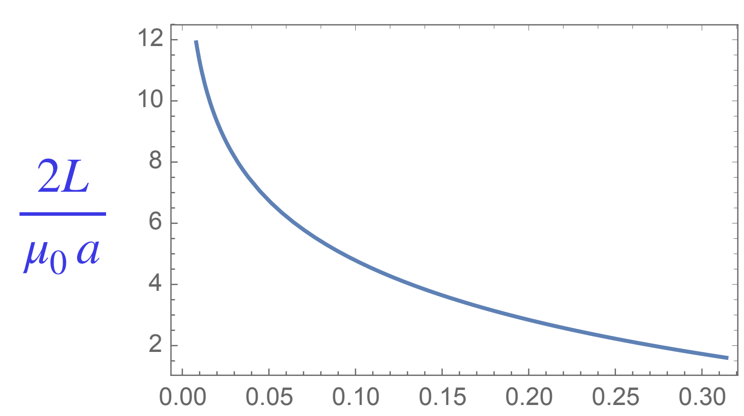
$$\delta\psi \sim \frac{\sqrt{A}}{a}$$

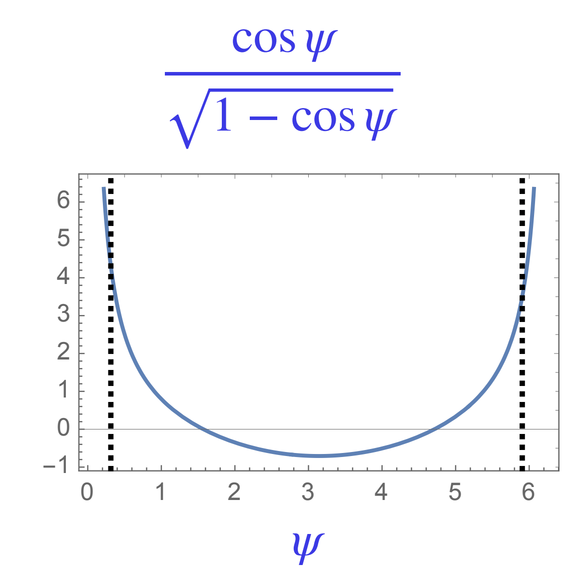
- Usando esses intervalos finitos, a integral pode ser calculada analiticamente:

$$L = \frac{\mu_0}{4} a \int_{\delta\psi}^{2\pi-\delta\psi} d\psi \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\cos\psi}} = \frac{\mu_0 a}{2}\left[\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-\cos\psi}}\left(2\cos\frac{\psi}{2} + \log\tan\frac{\psi}{4}\right)\right]_{\delta\psi}^{2\pi-\delta\psi}$$

O resultado está mostrado abaixo, como uma função dessa "regularização" — o ângulo $\delta\psi$:







Transformadores

- Frequentemente queremos aumentar o máximo possível o campo magnético. Uma maneira prática de fazer isso é utilizando objetos feitos de algum ***material ferromagnético***, para os quais $\mu \gg \mu_0$, e portanto:

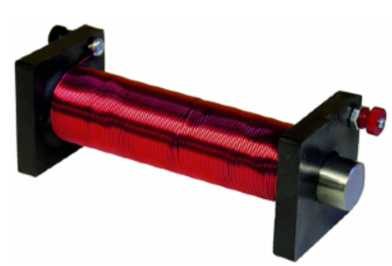
$$\vec{B}_{dentro} = \mu \, \vec{H}_{dentro} \gg \vec{B}_{fora} = \mu_0 \, \vec{H}_{fora}$$

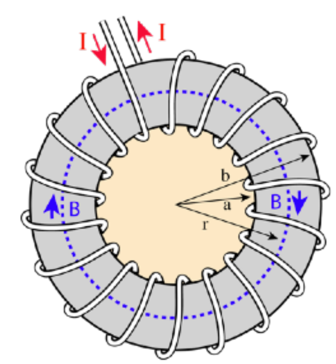
- Veja o exemplo de um solenoide:

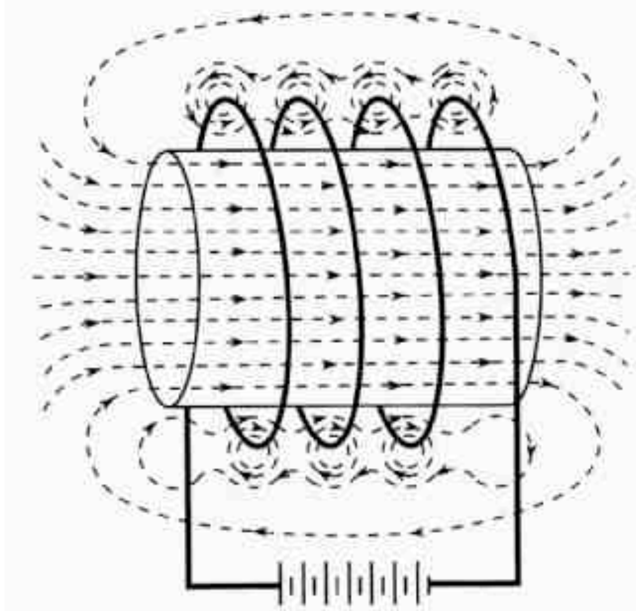
$$B = \mu \, \frac{N\,I}{h}$$

- Ou seja, quando o solenoide tem um núcleo de Fe, o campo magnético é muito maior — um efeito da magnetização dos materiais ferromagnéticos, que ***amplifica*** o campo magnético.

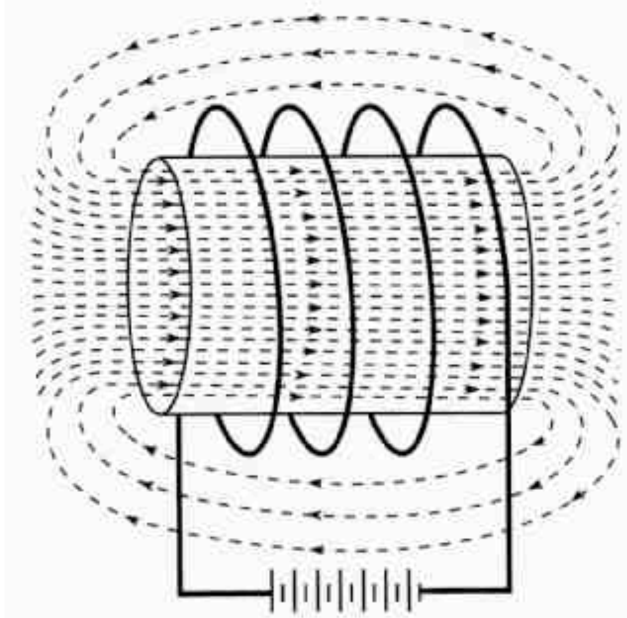
- Por essa razão, os solenóides quase sempre têm ***núcleos de Ferro***







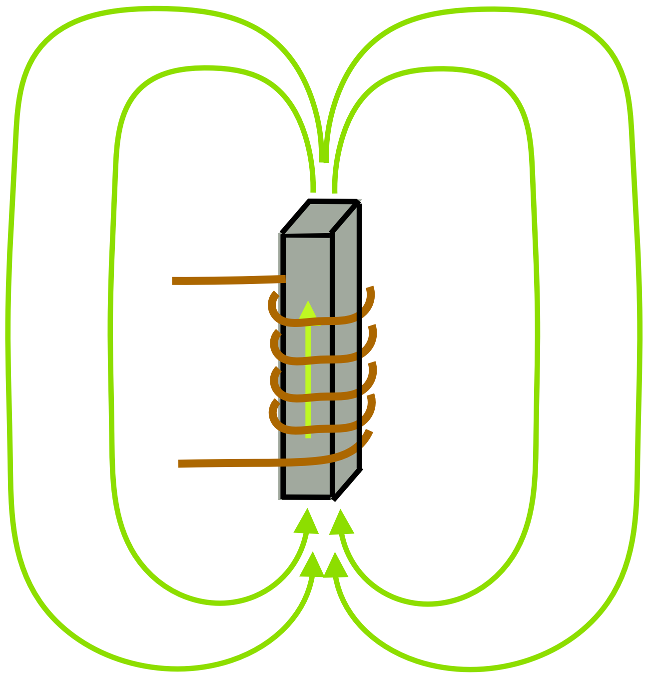
Preenchimento: ar

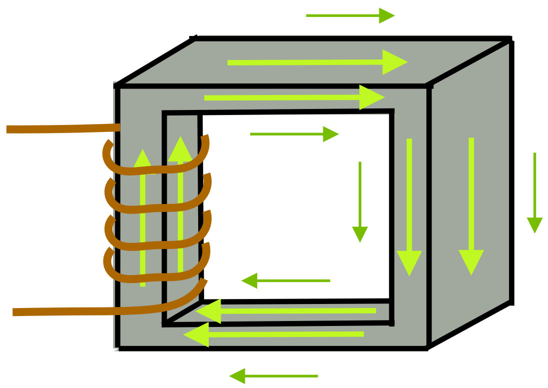


Preenchimento: Fe

Transformadores

- Além de amplificar o campo, podemos usar materiais ferromagnéticos para "focar", ou "direcionar" o campo magnético.
- Um solenoide apenas com núcleo de Ferro aumenta o campo no seu interior, mas fora desse núcleo o campo diminui e se "dispersa".
- Porém, se ajudamos o campo magnético dando um "caminho" ferromagnético, o campo vai se concentrar por ali, e fechar as linhas de campo através daquele caminho.
- Geralmente as perdas da intensidade do campo são mínimas da região interior do solenóide às outras regiões do material ferromagnético.
- Isso significa que podemos agora re-utilizar o campo magnético nessas outras regiões do material. Uma dessas aplicações são os ***transformadores***.





Transformadores

- A idéia é que num transformador podemos pegar o mesmo campo magnético e variar o fluxo, controlando o número de voltas de um fio.
- No caso da figura ao lado, vamos supor que a seção reta dos dois solenóides são as mesmas. O campo magnético gerado pelo primeiro solenoide é:

$$B = \mu \frac{N_1 I_1}{h}$$

- Assumindo que esse campo é o mesmo na região do segundo solenoide, temos que o fluxo por dentro desse segundo solenoide é:

$$\Phi_2 = \left(N_2 A\right)\left(\mu \frac{N_1 I_1}{h}\right) = \mu \frac{N_1 N_2 A}{h} I_1$$

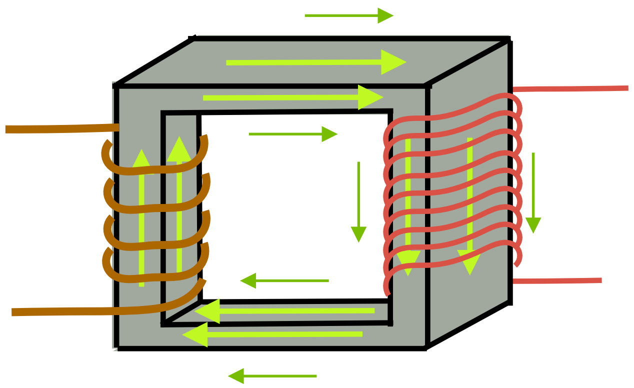
- Suponha que temos uma corrente alternada, com frequência ν (por exemplo, 60 Hz). Podemos escrever:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t) \quad , \quad \text{onde} \quad \omega = 2\pi\,\nu$$

- A força eletromotriz induzida no segundo solenóide será, portanto:

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\mu \frac{N_1 N_2 A}{h} \frac{dI_1}{dt}$$

$$= -\mu \frac{N_1 N_2 A}{h}\,\omega I_0 \cos(\omega t) = -V_2\,\cos(\omega t)$$



- Ajustando o número de voltas (N_2) podemos obter (praticamente) qualquer voltagem que quisermos no fio do segundo circuito! Assim, podemos, por exemplo, transformar uma voltagem de 240 V em uma de 120 V.

Geradores

- ***Geradores*** são aparatos similares aos transformadores, e permitem transformar ***energia mecânica*** em ***eletricidade*** (voltagem).

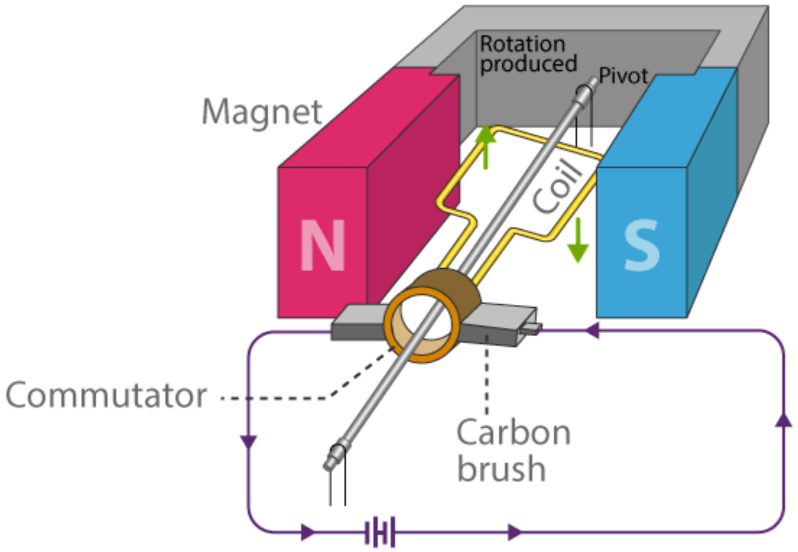
- Vamos supor que temos um circuito circular, de área A, inserido numa região com campo $\vec{B}_0$. O fluxo depende do ângulo $\theta = \omega t$, portanto temos algo como:

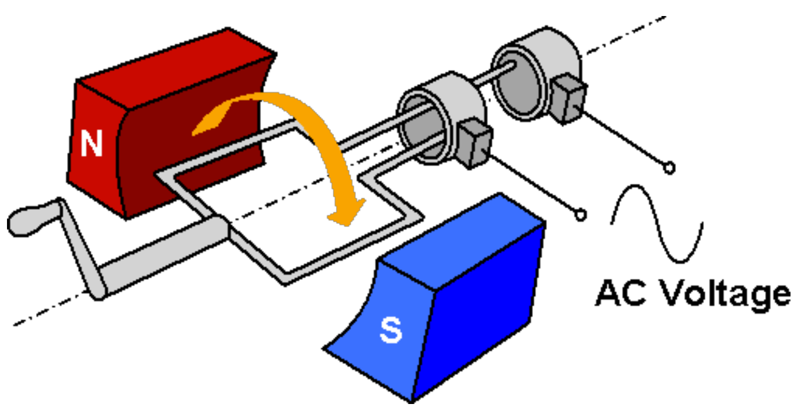
$$\Phi \ = \ A \ B_0 \ \sin(\omega t)$$

- À medida que o circuito gira com uma frequência angular ω, esse ângulo oscila, fazendo com que o fluxo varie. A força eletromotriz induzida no circuito é, portanto:

$$\mathscr{E} \ = - \frac{d\,\Phi}{dt} \ = - \ V_0 \ \cos(\omega t) \quad , \quad \text{onde} \quad V_0 = A \ B_0 \, \omega$$ é a voltagem de saída do gerador.

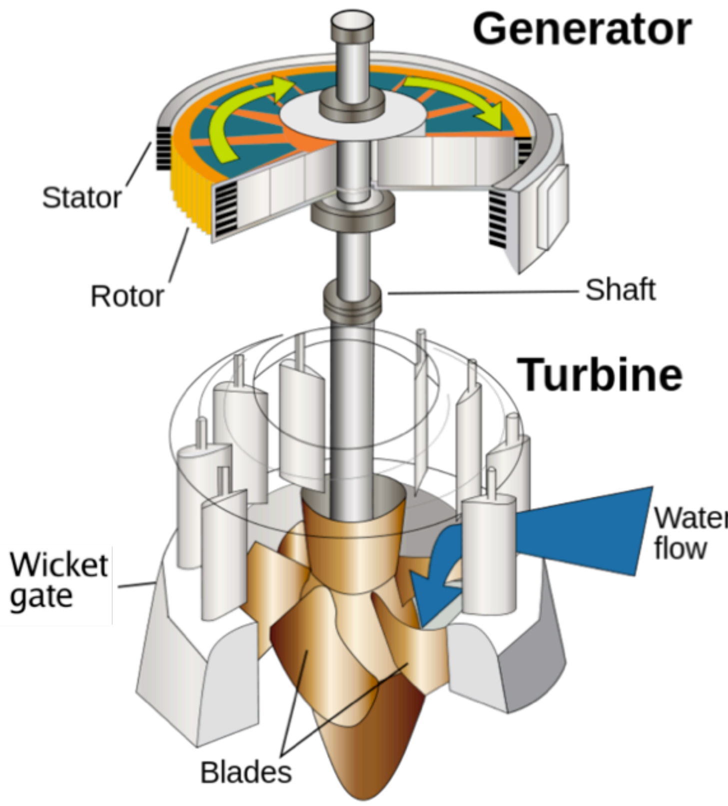
- Ou seja, controlando a frequência com que "giramos a manivela" na figura ao lado, ou controlando a frequência de uma turbina hidrelétrica, podemos ajustar a voltagem do nosso gerador.

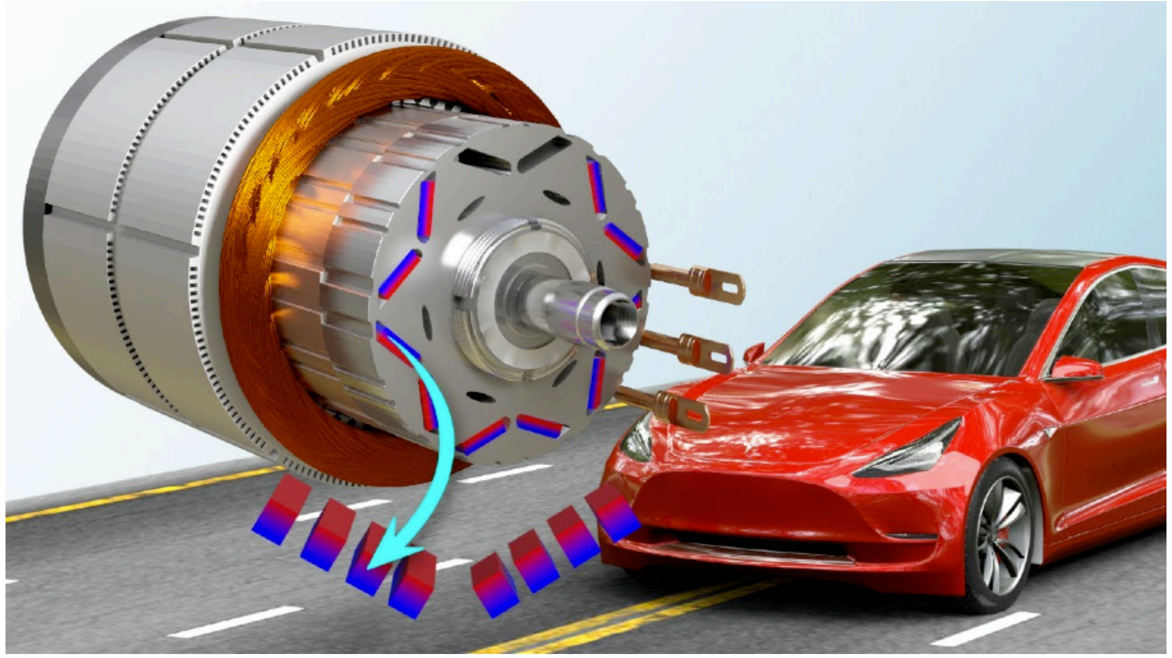




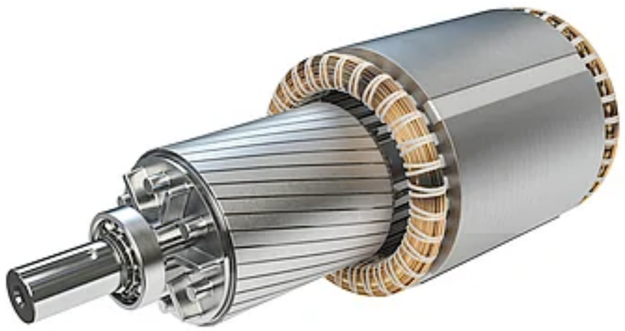
Geradores

- Numa usina hidrelétrica, as turbinas fornecem a energia mecânica que move os geradores (as parte fixa se chama *estator*).
- É claro que um ***motor elétrico*** faz o oposto: ele pega uma voltagem/corrente num circuito e transforma essa energia em energia mecânica.
- No caso de um motor, controlando a corrente (DC) e/ou a frequência (AC) na bobina, podemos regular o torque do motor — e, por exemplo, a aceleração do carro.

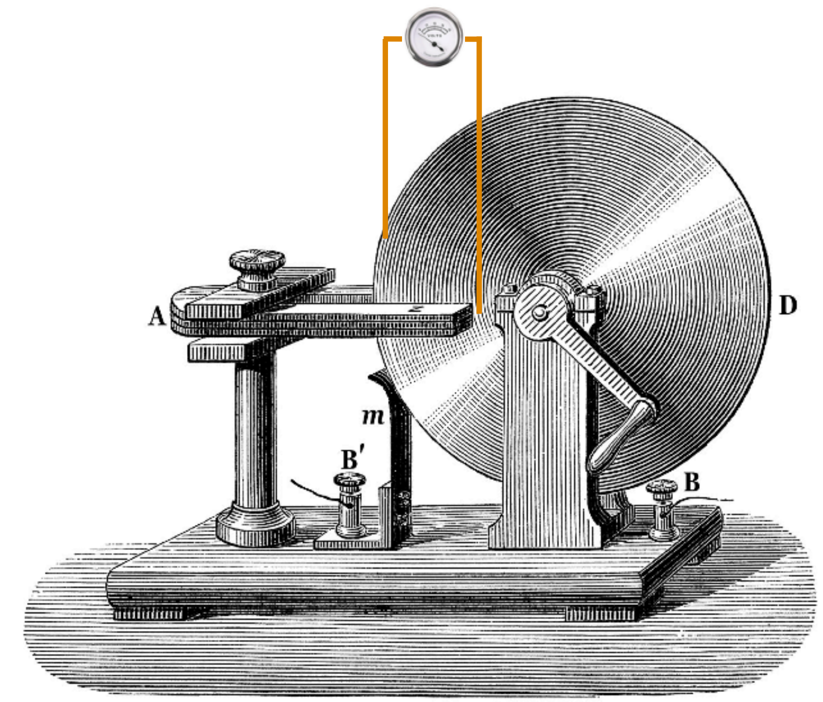




https://www.youtube.com/watch?v=esUb7Zy5Oio



O disco de Faraday



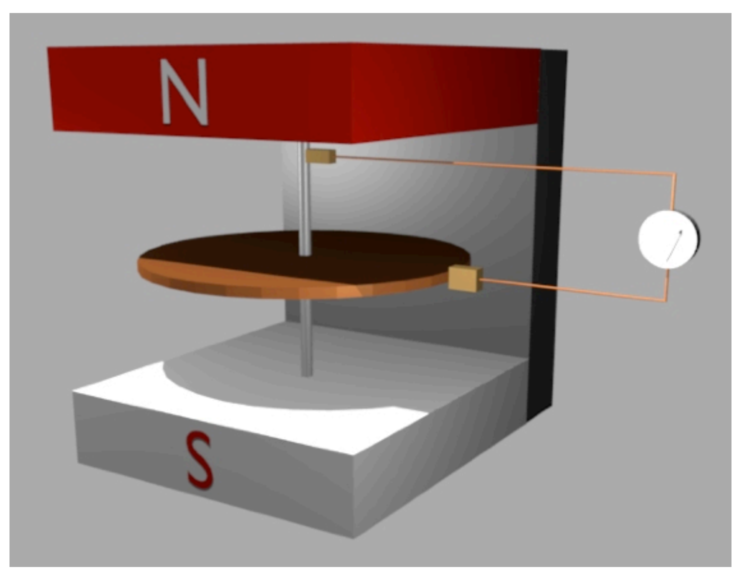
- Esses geradores simples também são chamados de geradores homopolares.
- A idéia é tomar um disco de metal na presença de um campo magnético, como mostrado na figura ao lado.
- Tome uma região fixa do disco tal como uma "fatia de pizza" de raio R e comprimento de arco $\Delta\theta$, de modo que o fluxo por essa região é dado por:

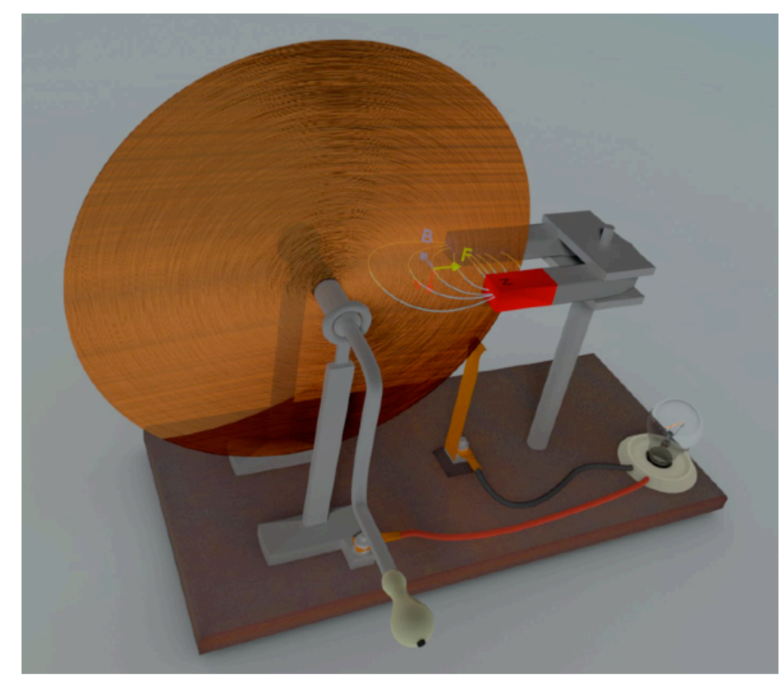
$$\Phi = B_0 A = B_0 \frac{1}{2} R\, R\Delta\theta$$

- Agora, se o disco ***gira com uma velocidade angular*** ω , é como se a "fatia de pizza" girasse, portanto:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} B_0 R^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} B_0 R^2 \omega$$

- De fato, o cálculo acima ***independente da fatia*** ! Podemos tomar até mesmo a configuração abaixo como um gerador homopolar:





Próxima aula:

- Circuitos RLC (resistência, indutância, capacitância)
- Osciladores
- Filtros
- Emissores de rádio

- Leitura: Griffiths, Cap. 7
- Leitura complementar: Jackson, Cap. 5