

DERIVADAS PARCIAIS

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS



OBJETIVO DA DERIVADA PARCIAL

- ✓ **Estudar a taxa de variação de z , quando x e y variam;**
- ✓ **Em determinada condição será variado o x e o y permanecerá fixo e vice-versa;**
- ✓ **Aplicar o conceito de derivada parcial para otimizar funções**

FIXANDO $Y=Y_0$ E VARIANDO X

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

FIXANDO $X=X_0$ E VARIANDO Y

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Então tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

NOTAÇÃO PARA A DERIVADA PARCIAL

Existem diversas notações alternativas para derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x , podemos escrever f_1 ou D_1f (para indicar a derivação em relação à primeira variável) ou $\partial f / \partial x$.

Porém, $\partial f / \partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

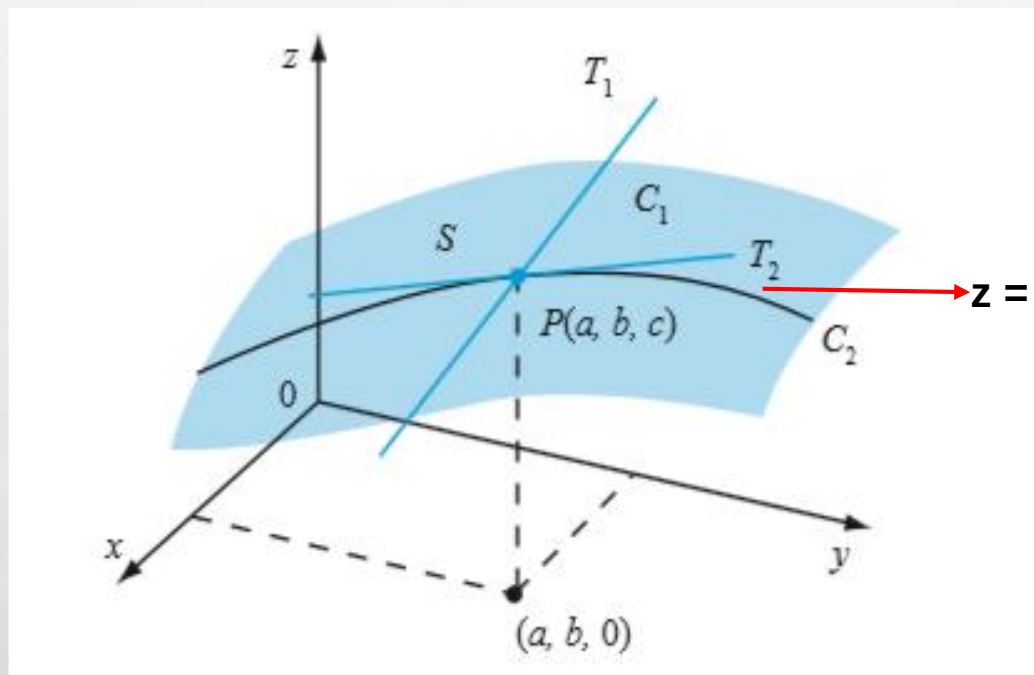
Considere os exemplos:

1- Determinar a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ de $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

2- Seja uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x,y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

O gráfico $z=f(a,b)$ representa uma superfície no espaço, a qual denominamos por S . Se (a,b,c) for um ponto de S , então $C=f(a,b)$.



$$z = g(x) = f(x, y)$$

A derivada resulta na inclinação da reta tangente à curva no ponto em questão.

Figura 1

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

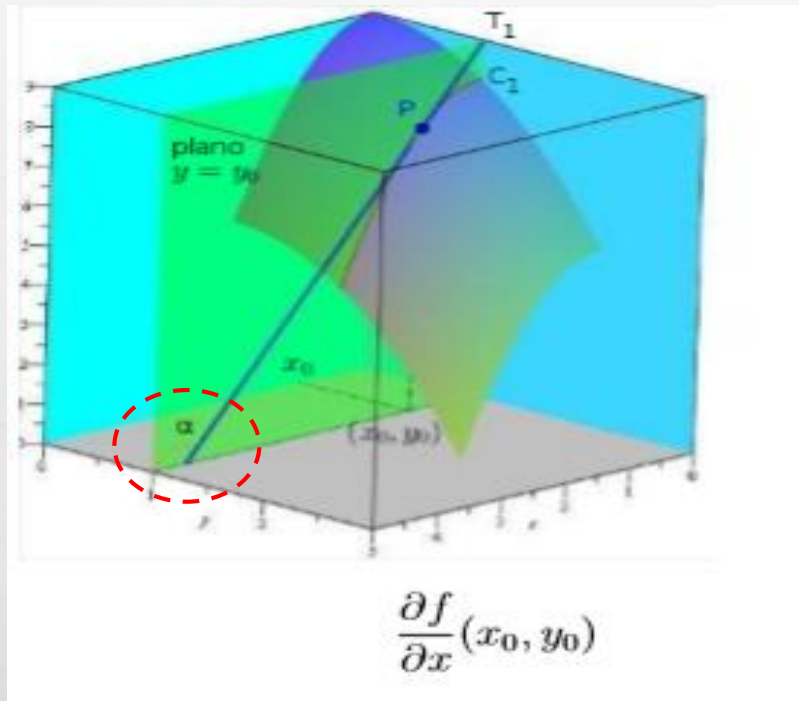


Figura 2

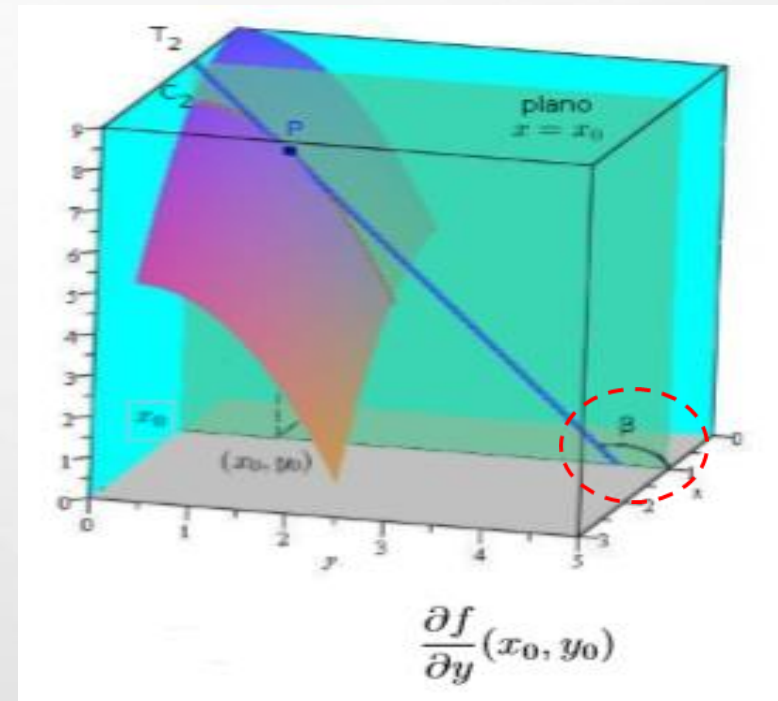


Figura 3

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

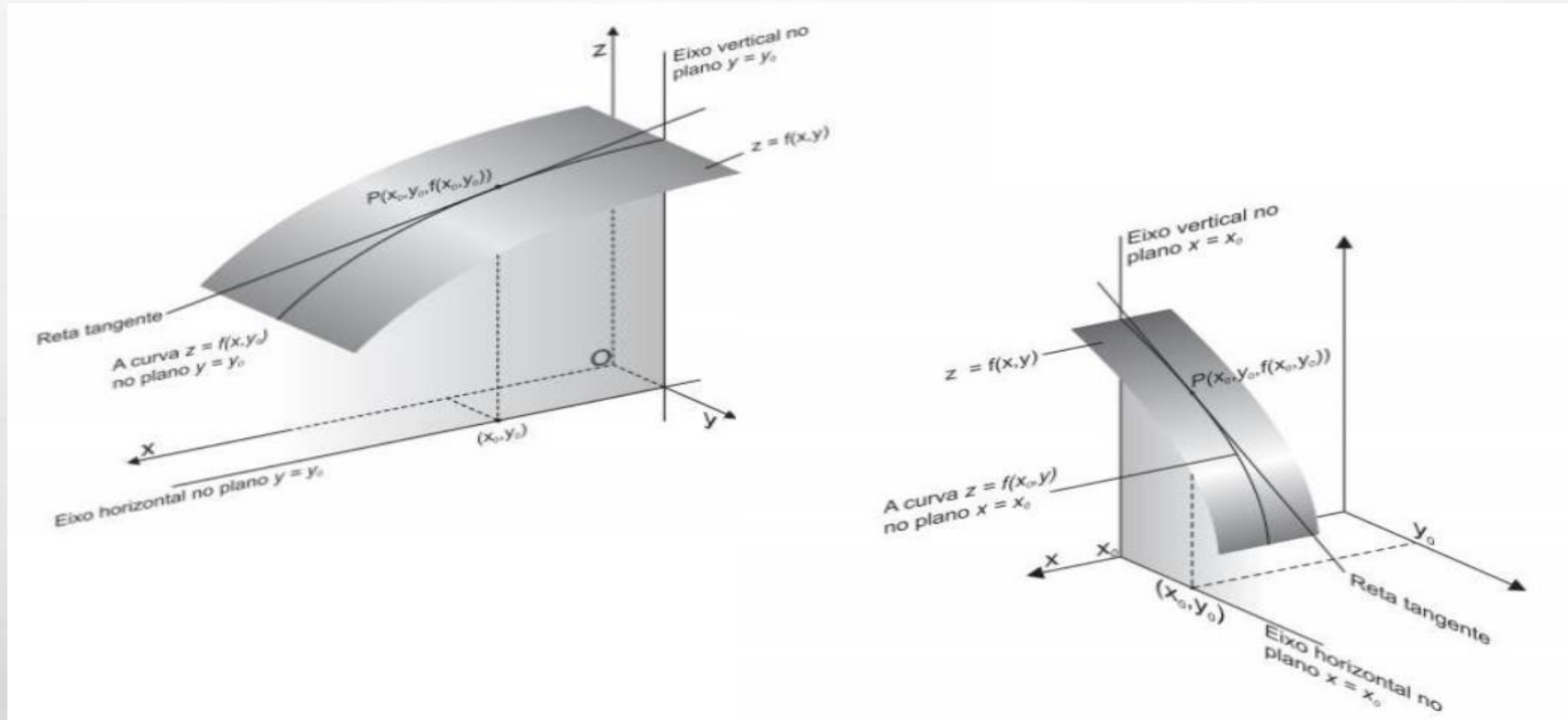


Figura 4

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

Considere os exemplos:

Determinar as seguintes derivadas,

$$3- f(x, y) = 4 - x^2 - y^2; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

$$4- f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

$$5- f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que possamos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, denominadas derivadas de segunda ordem.

Se $z = f(x, y)$ usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

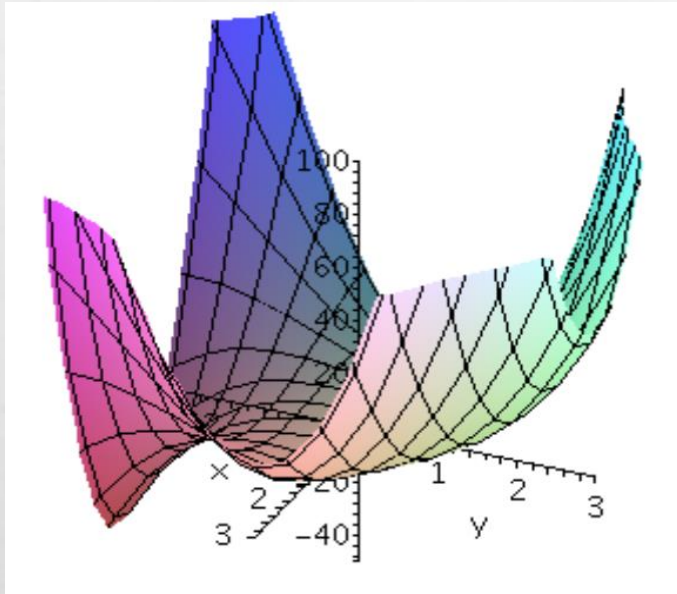
$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

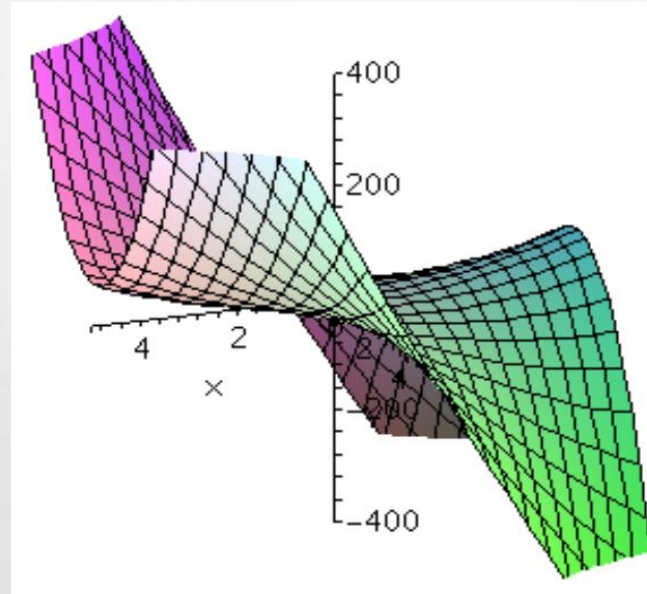
DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Considere os exemplos:
Determinar as seguintes derivadas,

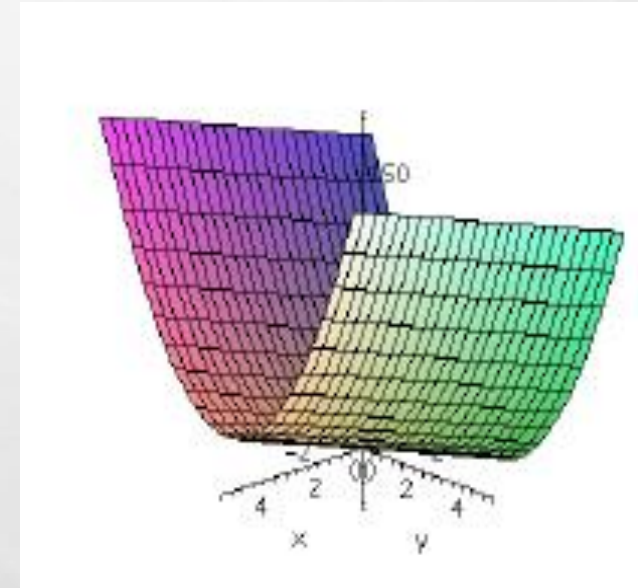
6- $z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$



$$z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$$

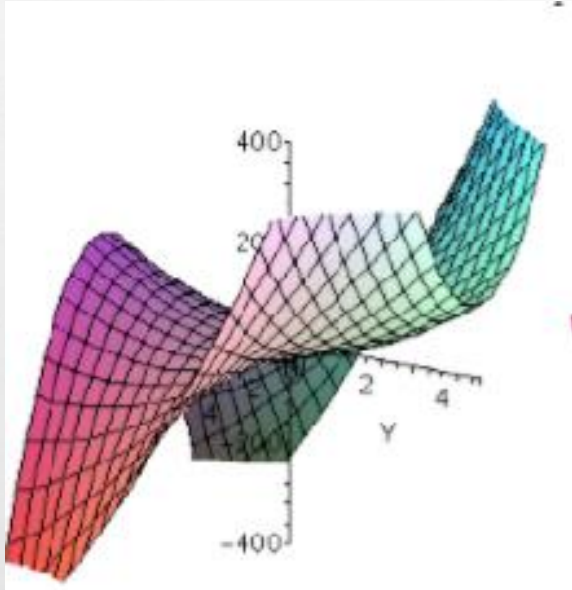


$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

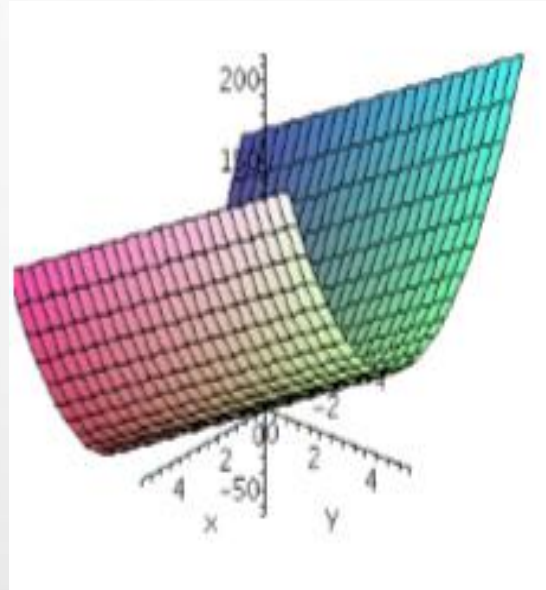


$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6y^2$$

DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

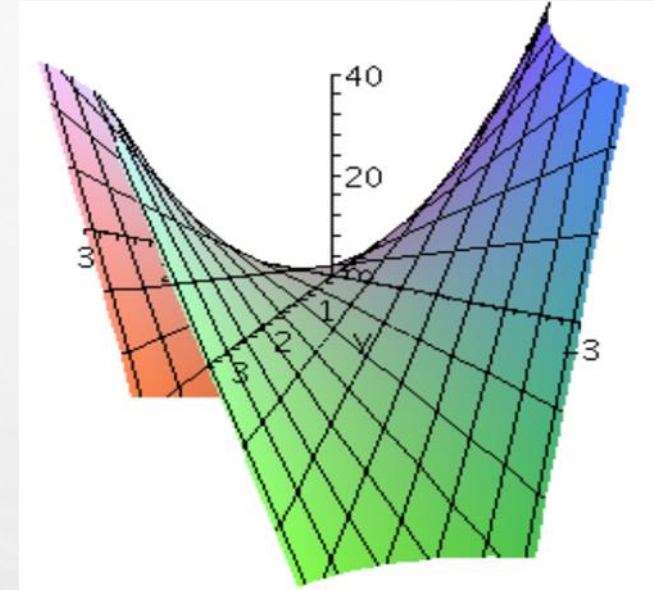


$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 + 6x^2y$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y + 6x^2$$

$$z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy$$

TEOREMA DE CLAIRAUT

Teorema (teorema de Clairaut, também chamado teorema de Schwarz)

Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em D então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$ se essas funções forem contínuas.

TEOREMA DE SCHWARZ

Seja a $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Considere o exemplo:

6- Verificar se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $f_{xy} = f_{yx}$.

$$f(x,y) = x^4y^3 - y^4$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem leis Físicas. Se considerarmos a equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denominada de equação de Laplace, observa-se que a solução dessa equação é intitulada de função harmônica, importante no estudo da condução de calor, escoamento de fluido e potencial elétrico.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Exemplos de Equações Diferenciais Parciais

Equação Burger – é abordada em várias áreas da matemática aplicada, dentre elas a modelagem dinâmica de gases e de fluxo de tráfego,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

Equação do Calor – usada para modelar a evolução temporal da temperatura de um corpo,

$$u_t = k\Delta u$$

Equação de Navier-Stokes - que é um sistema de equações diferenciais que modela o movimento de um fluido, $\vartheta(x, t)$, $p(x, t)$, $f(x, t)$ são o campo de velocidade, a pressão e a força externa no ponto x , no instante t . Permitem determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\vartheta \cdot \nabla) \vartheta = -\nabla p + \rho \nabla^2 \vartheta + f(x, t)$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, um onda sonora, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

Considere os exemplos:

7- Determinar se as funções são solução da equação de Laplace

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

8- Mostre que a função $u = \text{sen}(kx) \cdot \text{sen}(akt)$ é solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$