Lista 2

$\boxed{\textbf{Q1.}}$ As matrizes abaixo representam operadores definidos por:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib \\ 0 & -ib & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ -i & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os (invariantes) traços e determinantes das matrizes.

b) Encontre todos os autovalores dos operadores acima, e verifique que eses satisfazem a relação dos invariantes determinados no item anterior.

c) Encontre a inversa de A e C.

d) Determine os comutadores $[A, B]$ e $[C, D]$.

e) Quais desses operadores podem representar observáveis físicos? Justifique.

$\boxed{\textbf{Q2.}}$ Considere os estados indicados abaixo:

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|-\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B}{\sqrt{2}}$$
$$|\psi_3\rangle = \frac{\sqrt{3}\,|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{2}$$

onde $|+\rangle = |0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $|\cdot\rangle_A |\cdot\rangle_B = |\cdot\rangle_A \otimes |\cdot\rangle_B$.

a) Calcule $|\psi_1\rangle^{\otimes 2}$ e $|\psi_1\rangle^{\otimes 3}$.

b) Determine os estados $\hat{X}_A |\psi_2\rangle$ e $\hat{Z}_A \otimes \hat{X}_B |\psi_3\rangle$.

c) Escreva a representação matricial do operador $\hat{X}_A \otimes \hat{H}_B$, e o estado após ação desse operador em $|\psi_3\rangle$. No estado final, qual a chance de achar o qbit A no estado $|0\rangle$?

$\boxed{\textbf{Q3.}}$ Os conjuntos $\{\,|A\rangle\,, |B\rangle\,, |C\rangle\,\}$ e $\{\,|1\rangle\,, |2\rangle\,, |3\rangle\,\}$ são base ortonormais completas, cuja relação é indicada abaixo. Considere $\hat{\rho}_A = |A\rangle\!\langle A|$ e $\hat{\rho}_m = \frac{1}{4}\,|1\rangle\!\langle 1| + \frac{1}{2}\,|2\rangle\!\langle 2| + \frac{1}{4}\,|3\rangle\!\langle 3|$.

$$
\begin{aligned}
|A\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\Big) \\
|B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right) \\
|C\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|1\rangle - \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

a) Calcule $\hat{\rho}_A$ na base $\{\,|1\rangle\,, |2\rangle\,, |3\rangle\,\}$ e $\hat{\rho}_m$ na base $\{\,|A\rangle\,, |B\rangle\,, |C\rangle\,\}$, determinando as quatro matrizes densidades. Use-as para determinar a pureza dos estados $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$.

b) Usando as matrizes densidades, calcule as probabilidades $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$ e $\mathscr{P}_A, \mathscr{P}_B, \mathscr{P}_C$; quando o sistema é preparado nos estados $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$.

c) Determine o operador e a matriz densidade de um estado de máxima mistura, e ordene esse estado junto com $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$, colocando-os em ordem crescente de pureza.

$\boxed{\textbf{Q4.}}$ O estado de um sistema de spin $1/2$ é dado por

$$
|\psi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|-\rangle
$$

a) Em uma medida na direção $\hat{z}$, quais as probabilidades de se observar os valores $\pm\hbar/2$?

b) Se, ao invés, a medida fosse na direção $\hat{x}$, qual a probabilidade de observar spin "up"?

c) Calcule os valores médios $\langle S_z\rangle$ e $\langle S_x\rangle$, e a incerteza da medida na direção $\hat{x}$.