Mercados incompletos

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Mercados completos
  - Conjunto amplo de ativos contingentes
  - Possível eliminar todo o risco individual ("perfect risk sharing")
  - Consumo individual varia apenas em função de choques agregados
- Mercados incompletos
  - Arranjos de divisão perfeita de risco podem não ser possíveis
- Mercados incompletos exógenos
  - Conjunto incompleto de ativos, que não é capaz de cobrir todas as contingências
  - "Bond economy"
- Mercados incompletos endógenos
  - Arranjos ex-ante ótimos não são sustentáveis ex-post

Bond economy

- Modelos com incerteza, mas apenas um ativo não contingente
  - Paga 1 unidade de consumo, independente do estado da natureza
  - Poupança precaucional
  - Modelo simples, 2 períodos, taxa de juros exógena
- Modelo de Aiyagari (1994)
  - Horizonte infinito
  - Agentes sujeitos a choques idiossincráticos de renda
  - Acesso apenas a um ativo não contigente
- Referências:

  - Vegh, C. (2008). *Open economy macroeconomics in developing countries*. The MIT Press, p. 76-85.
  - Aiyagari, S. Rao (1994). "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving." *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109, No. 3., p. 659-684.

Modelo de dois períodos

- Dois períodos: $t = 1$ e $t = 2$
- No primeiro período, a dotação é certa $= y_1$
- No segundo período, há incerteza:

$$y_2 = \begin{cases} y_2^H, & \text{com prob. } p \\ y_2^L, & \text{com prob. } 1 - p \end{cases}$$

- Há apenas um ativo, com taxa de juros r (exógena), que não depende do estado da natureza
  - Para cada unidade poupada em $t = 1$, retorna $1 + r$ em $t = 2$, independentemente da realização da dotação

Preferência e restrições

- Restrição orçamentária do período $t = 1$

$$c_1 + b = y_1$$

- Restrições orçamentárias do período $t = 2$

$$c_2^H = (1+r)b + y_2^H$$
$$c_2^L = (1+r)b + y_2^L$$

  - b: ativo não contingente

- Preferência:

$$U = u(c_1) + \beta \mathbb{E}\{u(c_2)\} = u(c_1) + \beta \left\{ pu(c_2^H) + (1-p)u(c_2^L) \right\}$$

  - $\beta \in (0,1)$: fator de desconto
  - $u'(c) > 0, u''(c) < 0, u'(0) = \infty$

Problema do consumidor

$$\max_{b} u(\underbrace{y_1 - b}_{=c_1}) + \beta \left\{ pu \underbrace{\left((1+r)b + y_2^H\right)}_{=c_2^H} + (1-p)u \underbrace{\left((1+r)b + y_2^L\right)}_{=c_2^L} \right\}$$

- Condição de primeira ordem (eq. de Euler):

$$\begin{aligned} u'(c_1) &= \beta(1+r)\left[pu'(c_2^H) + (1-p)u'(c_2^L)\right] \\ &= \beta(1+r)\mathbb{E}\left\{u'(c_2)\right\} \end{aligned}$$

Ausência de incerteza

- Para facilitar a comparação, suponha que não há incerteza em relação a y_2 e que:
$$y_2 = \bar{y}_2 = py_2^H + (1-p)y_2^L$$

- A eq. de Euler então implica
$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$$
  - $\beta(1+r) > 1 \Rightarrow u'(c_1) > u'(c_2) \Rightarrow c_1 < c_2$
  - $\beta(1+r) = 1 \Rightarrow u'(c_1) = u'(c_2) \Rightarrow c_1 = c_2$
  - $\beta(1+r) < 1 \Rightarrow u'(c_1) < u'(c_2) \Rightarrow c_1 > c_2$

Ausência de incerteza

- A poupança é dada implicitamente por:

$$u'\left(y_1 - \widetilde{b}\right) = \beta(1+r)u'\left(\bar{y}_2 + (1+r)\widetilde{b}\right)$$

  - $\widetilde{b}$: poupança quando não há incerteza e $y_2 = \bar{y}_2$

- Sob incerteza, poupança também depende do formato da função utilidade
  - Em particular da terceira derivada $u'''(c)$, ou da convexidade da utilidade marginal
  - Isso é diferente do conceito de aversão ao risco, que está relacionado à segunda derivada

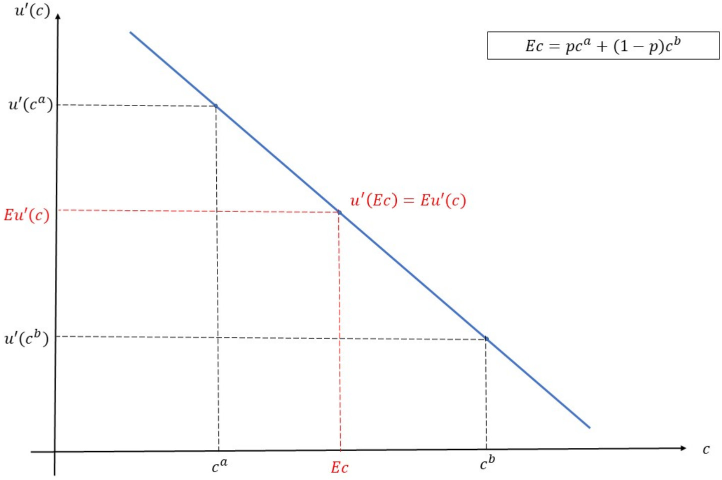
Equivalente de certeza

- Olharemos primeiro a situação em que essa derivada é nula, ou seja, utilidade quadrática:
$$u(c) = Ac - Bc^2$$
  - Considere ramo crescente da função
  - Utilidade marginal linear: $u'(c) = A - 2Bc$
  - Equivalente de certeza

- Nesse caso, como a utilidade marginal é linear:

$$\mathbb{E}u'(c_2) = u'(\mathbb{E}c_2)$$

Equivalente de certeza



Equivalente de certeza

- Substituindo na eq. de Euler:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)\mathbb{E}\left\{u'(c_2)\right\}$$
$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(\mathbb{E}c_2)$$

- Note que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}c_2 &= pc_2^H + (1-p)c_2^L \\ &= p\left[(1+r)b + y_2^H\right] + (1-p)\left[(1+r)b + y_2^L\right] \\ &= (1+r)b + py_2^H + (1-p)y_2^L = (1+r)b + \mathbb{E}y_2\end{aligned}$$

- Poupança é igual à de um problema sem incerteza, com dotação no segundo período igual a $\mathbb{E}y_2 = \bar{y}_2$

$$b = \widetilde{b}$$

Poupança Precaucional

- Considere agora o caso em que $u'''(c) > 0$
- Da desigualdade de Jensen, como $u'(c)$ convexa:

$$\mathbb{E}u'(c_2) > u'(\mathbb{E}c_2)$$

- Usando a eq. de Euler:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)\mathbb{E}u'(c_2) > \beta(1+r)u'(\mathbb{E}c_2)$$

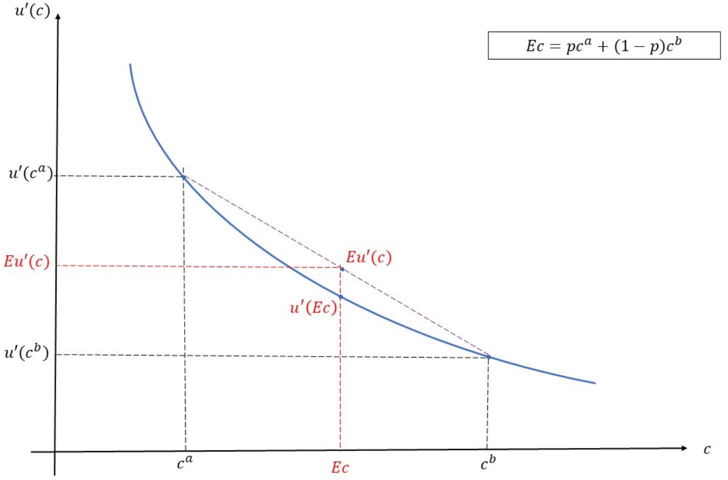
- Ou:

$$u'(y_1 - b) > \beta(1+r)u'\left((1+r)b + \mathbb{E}y_2\right)$$

- Lembrando que, sob equivalente de certeza:

$$u'(y_1 - \widetilde{b}) = \beta(1+r)u'\left((1+r)\widetilde{b} + \mathbb{E}y_2\right)$$

Desigualdade de Jensen



Poupança Precaucional

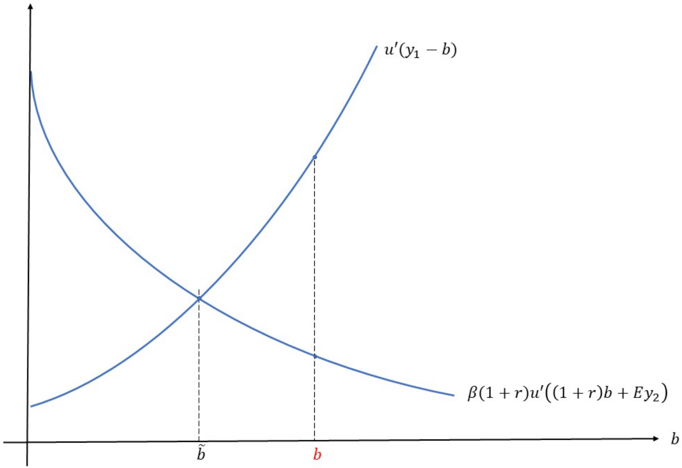
- No gráfico a seguir:
  - $u'(y_1 - b)$: crescente em b
  - $\beta(1+r)u'((1+r)b + \mathbb{E}y_2)$: decrescente em b
  - Cruzamento ocorre em $b = \widetilde{b}$

- Dado que $u'(c_1) > \beta(1+r)u'(\mathbb{E}c_2)$, então

$$b > \widetilde{b}$$

- Na presença de incerteza e $u'''(c) > 0$, agentes poupam **mais** do que no caso sem incerteza
  - Poupança precaucional

Poupança Precaucional



Poupança Precaucional

- Se $u'''(c) > 0$, a utilidade marginal cai rapidamente quando o consumo se aproxima de zero

- Indivíduos buscarão se proteger contra essa eventualidade
  - Tendem a poupar mais

- Quanto maior a diferença entre y_2^H e y_2^L, mais forte será esse efeito
  - Maior a poupança precaucional

- Utilidade CRRA satisfaz $u'''(c) > 0$

- Esse conceito é diferente de aversão ao risco
  - Por exemplo, utilidade quadrática é côncava (agentes avessos ao risco), mas apresenta utilidade marginal linear

Modelo de Aiyagari (1994)

- Horizonte infinito: $t \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Indivíduos se defrontam com risco individual de renda, mas há apenas um ativo não contingente, que paga a taxa de juros r
  - Mercados incompletos, motivo precaucional
- Não há incerteza agregada
- Há um limite finito para a dívida dos indivíduos
- Focar no estado estacionário

Modelo de Aiyagari (1994)

- Há um contínuo de agentes (medida 1), com preferências idênticas, mas que estão sujeitos a choques idiossincráticos na renda do trabalho
- Problema de um agente com riqueza inicial a_0, e choque s_0 em sua renda do trabalho

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

s.t.

$$c_t + a_{t+1} = w \cdot s_t + (1+r) a_t$$
$$a_t \geq -\phi$$

$$a_0, s_0 \text{ dados}$$

- $u'(c) > 0, u''(c) < 0, u'(0) = \infty$
- $u'''(c) > 0$: motivo precaucional

Modelo de Aiyagari (1994)

- s_t: choque idiossincrático na renda do trabalho
  - $s_t \in \{s_0, s_1, ..., s_n\} = S$
  - Segue processo de Markov com pdf condicional $f(s_{t+1}|s_t)$
- a_t: ativo não contingente, que paga a taxa de juros r
- ϕ: limite de dívida
- Focar no estado estacionário, de modo que w e r sejam constantes no tempo

Equação de Bellman

- Problema do agente com riqueza a, e choque corrente s

$$V(a,s) = \max_{c,a'} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V(a',s') \,|\, s \right] \right\}$$

s.t.

$$\begin{aligned} c + a' &= w \cdot s + (1+r)a \\ a' &\geq -\phi \end{aligned}$$

- Regras de decisão: $c(a,s), a'(a,s)$
- Distribuição: $\Gamma(a,s)$
  - Em estado estacionário, distribuição não muda no tempo

Agregação

- Como não há incerteza agregada, a quantidade de trabalho agregada é constante (normalizar em 1):

$$\int_{s \in S} \int_{a \in A} s\Gamma(a,s) \cdot da \cdot ds = \bar{s} = 1$$

- Estoque agregado de ativos = estoque de capital

$$k = \int_{s \in S} \int_{a \in A} a\Gamma(a,s) \cdot da \cdot ds$$

  - constante no tempo em estado estacionário

Produção

- Produção feita por uma firma representativa, com função de produção $Y = F(K, L)$
  - Retornos constantes de escala
  - Condições de Inada
- $f(K/L)$: função de produção por trabalhador
  - $f'(K/L) > 0$, $f''(K/L) < 0$
- Supondo depreciação nula:

$$r = f'(K/L) = f'(k)$$

  - Dado que, em equilíbrio, $K = k$ e $L = 1$

Mercados completos

- A equação de Euler de um indivíduo não restrito pelo limite de dívida é dada por:
$$u'(c_t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t u'(c_{t+1})$$
- Apenas como referência, olharemos o equilíbrio no caso de mercados completos
- Como não há incerteza agregada, todos os indivíduos apresentariam consumo constante. Da equação de Euler:
$$1 = \beta(1+r_C)$$
- Taxa de juros em mercados completos:
$$r_C = \frac{1}{\beta} - 1$$
- Estoque de capital dado implicitamente por:
$$f'(k_C) = \frac{1}{\beta} - 1$$

Mercados incompletos

- Voltando ao caso em que há apenas um ativo não contingente, usando a eq. de Euler e a desigualdade de Jensen:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) > \beta(1+r)u'(\mathbb{E}_t c_{t+1})$$

  - Dado que $u'''(c) > 0$ e a utilidade marginal é convexa

- Se tivéssemos $\beta(1+r) = 1$:

$$u'(c_t) > u'(\mathbb{E}_t c_{t+1})$$

- Como $u''(c) < 0$, isso implicaria que:

$$c_t < \mathbb{E}_t c_{t+1}$$

Mercados incompletos

- Portanto, se $\beta(1+r) = 1$, consumo médio apresentaria uma tendência a aumentar no tempo
  - Indivíduos acumulariam quantidades infinitas de capital por conta do motivo precaucional
  - Isso não pode ser equilíbrio, pois r seria zero

- Logo, a taxa de juros de mercados incompletos tem que ser menor que a de mercados completos

$$r_I < \frac{1}{\beta} - 1 = r_C$$

- Além disso, o estoque de capital será mais alto em mercados incompletos

$$f'(k_I) < f'(k_C) \Rightarrow k_I > k_C$$

  - Dado $f''(k) < 0$

Mercados incompletos endógenos

- Alocações podem ser ótimas ex-ante, porém não ex-post
  - Agentes podem renegar alocação e consumir própria dotação
  - Não há enforcement perfeito
  - Alocação inicial não se torna mais alcançável
- Como consequência, algumas alocações não se tornam mais possíveis
- Primeiro mostraremos um exemplo em que é ótimo ter divisão perfeita de risco
  - No entanto, dependendo dos parâmetros, ex-post algum agente pode preferir abandonar o arranjo
- Depois discutiremos o artigo de Krueger & Perri (2006), que caracteriza alocações ótimas restritas (as quais os agentes não renegam ex-post)
  - Divisão de risco imperfeita
  - Referência: Krueger, D.; Perri, F. (2006). "Does Income Inequality Lead to Consumption Inequality? Evidence and Theory." *Review of Economic Studies*, vol. 73(1), pages 163-193.

Exemplo

- Suponha dois agentes (i e j), que vivem para sempre
    - No período zero ambos recebem dotação $y_0^i = y_0^j = 1$
- A partir de $t = 1$, há dois estados possíveis

$$(y_t^i, y_t^j) = \begin{cases} (1+\varepsilon, 1-\varepsilon), & \text{com prob, } 1/2 \\ (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

- Não há incerteza agregada
- Ex-ante é ótimo manter consumo constante:

$$c_t^i = c_t^j = 1$$

Exemplo

- Suponha agora que cada indivíduo pode abandonar o arranjo, uma vez que observe sua dotação
  - Punição: banido de outros arranjos no futuro, de modo que precisa consumir sua própria dotação para sempre

- Se, em $t = 1$, o indivíduo i receber $1+\varepsilon$, seu payoff de permanecer no arranjo original é:

$$V_{1i} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(1) = \frac{u(1)}{1-\beta}$$

- Se renegar o arranjo, payoff é:

$$\begin{aligned} W_{1i}(\varepsilon) &= u(1+\varepsilon) + \sum_{t=2}^{\infty} \beta^{t-1} \left\{ \frac{1}{2} u(1+\varepsilon) + \frac{1}{2} u(1-\varepsilon) \right\} \\ &= u(1+\varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{1-\beta} \{ u(1+\varepsilon) + u(1-\varepsilon) \} \end{aligned}$$

Exemplo

- Arranjo inicial é sustentável se:

$$W_{1i}(\varepsilon) \leq V_{1i}$$

$$u(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta}\{u(1+\varepsilon)+u(1-\varepsilon)\} \leq \frac{u(1)}{1-\beta}$$

- Note que, para $\varepsilon = 0$, $W_{1i}(0) = V_{1i}(0)$
- Além disso:

$$W'_{1i}(\varepsilon) = u'(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta}\{u'(1+\varepsilon)-u'(1-\varepsilon)\}$$

$$W'_{1i}(0) = u'(1) > 0$$

Exemplo

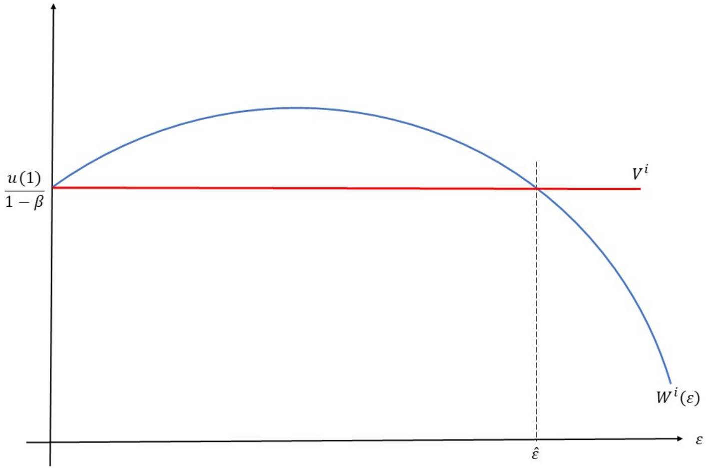
- Portanto, para ε próximo de zero

$$W_{1i}(\varepsilon) > V_{1i}$$

- Assim, para valores de ε não muito altos, o arranjo de divisão de risco não é mais alcançável
  - No gráfico a seguir, para qualquer $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon})$, o first-best não é atingível

- Há um ganho de curto prazo quando o agente recebe a dotação mais alta, porém um custo da volatilidade futura (deve consumir própria dotação, que é incerta)
  - Se ε é baixo, esse custo de volatilidade menos que compensa o ganho de curto prazo

Exemplo



Krueger & Perri (2006)

- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, ...\}$
- 2 agentes, idênticos ex-ante: agente 1 e agente 2
- Dotações:
  - "Renda" do trabalho – estocástica
  - "Renda" do capital – não estocástica
- Renda do trabalho: em cada t, há dois possíveis estados

$$\begin{cases} s_t = 1 \Rightarrow y_{1t} = 1 + \varepsilon; \; y_{2t} = 1 - \varepsilon \\ s_t = 2 \Rightarrow y_{1t} = 1 - \varepsilon; \; y_{2t} = 1 + \varepsilon \end{cases}$$

  - $\varepsilon \in [0, 1)$: variabilidade da renda do trabalho entre agentes
- $\pi(s_t = 1) = \pi(s_t = 2) = 1/2$
- Renda do capital: cada agente possui uma árvore, que paga r todo período

Preferências e restrições

- Restrição de recursos:

$$c_{1t} + c_{2t} = 2(1+r)$$

- Preferências (da perspectiva de $t=0$):

$$U(c^i) = (1-\beta)\mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^i)\right\} = (1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\beta^t u\left(c^i(s^t)\right)\pi\left(s^t\right)$$

- Utilidade de continuação, a partir de uma história s^t:

$$\begin{aligned} U(c^i, s^t) &= (1-\beta)\mathbb{E}_t\left\{\sum_{h=t}^{\infty}\beta^{t-h}u(c_h^i)\right\} \\ &= (1-\beta)\sum_{h=t}^{\infty}\sum_{s^h|s^t}\beta^{h-t}u\left(c^i(s^h)\right)\pi\left(s^h|s^t\right) \end{aligned}$$

Preferências e restrições

- Cada agente pode renegar arranjo de divisão de risco a cada momento
  - Punição: excluído para sempre de arranjos de divisão de risco, tendo que consumir a própria dotação daí em diante
  - Além disso, perde a renda do capital para sempre

- Para que agente i continue a participar de um determinado arranjo:

$$U(c^i, s^t) \geq U^{aut}(y^i, s^t) = (1-\beta) \sum_{h=t}^{\infty} \sum_{s^h|s^t} \beta^{h-t} u\left(y^i(s^h)\right) \pi\left(s^h \middle| s^t\right)$$

- **Constrained Efficient Allocation**:
  - Equação acima é satisfeita para todo i, e todo s^t
  - Restrição de recursos satisfeita
  - Menor volatilidade possível de recursos, dadas essas restrições

Payoffs

- First best:

$$c_{1t} = c_{2t} = 1 + r$$

- Payoff do first best:

$$U_{FB} = u(1 + r)$$

- Payoff de autarquia (caso agente receba dotação $1 + \varepsilon$):

$$U_H(\varepsilon) = (1 - \beta)u(1 + \varepsilon) + \beta \left\{ \frac{1}{2}u(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2}u(1 - \varepsilon) \right\}$$

- Payoff de autarquia (caso agente receba dotação $1 - \varepsilon$):

$$U_L(\varepsilon) = (1 - \beta)u(1 - \varepsilon) + \beta \left\{ \frac{1}{2}u(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2}u(1 - \varepsilon) \right\}$$

Payoffs

- $U_H(\varepsilon)$ tem formato de "U" invertido, com máximo em ε_M :

$$U_H'(\varepsilon) = (1-\beta)u'(1+\varepsilon) + \beta\left\{\frac{1}{2}u'(1+\varepsilon) - \frac{1}{2}u'(1-\varepsilon)\right\}$$
$$U_H''(\varepsilon) = (1-\beta)u''(1+\varepsilon) + \beta\left\{\frac{1}{2}u''(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}u''(1-\varepsilon)\right\} < 0$$

  - Reflete tradeoff entre ganho de curto prazo e volatilidade futura
- Note também que:

$$U_H'(0) = (1-\beta)u'(1) > 0$$
$$U_H'(1) = (1-\beta)u'(2) + \beta\left\{\frac{1}{2}u'(2) - \frac{1}{2}u'(0)\right\} = -\infty$$

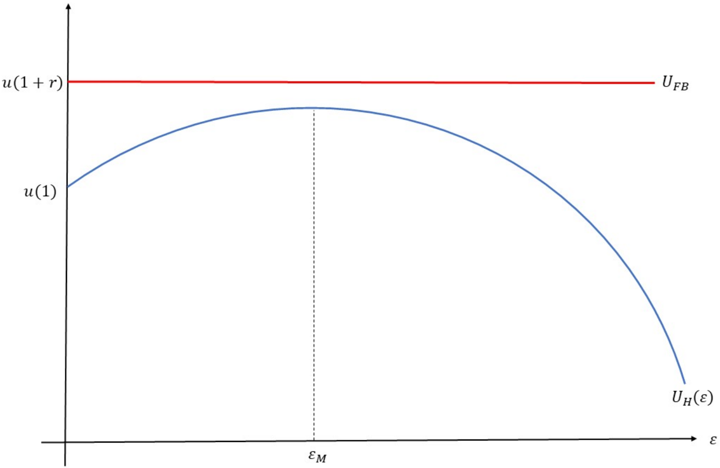
- Além disso, $U_H(0) = u(1)$
- O agente que recebe $1-\varepsilon$ sempre prefere continuar em um arranjo de divisão de risco

Dois casos

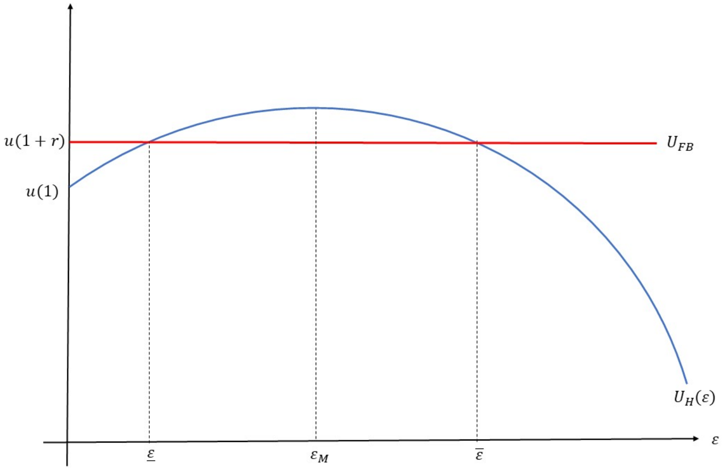
1. $U_H(\varepsilon_M) \leq U_{FB}$
   - Nesse caso, toda a curva $U_H(\varepsilon_M)$ está abaixo de U_{FB}
   - Agentes sempre preferem divisão perfeita de risco, para qualquer ε
   - First best é sempre implementável
2. $U_H(\varepsilon_M) > U_{FB}$
   - Para alguns valores de ε first best não é implementável
   - Especificamente para $\varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}]$ no gráfico

Focaremos nesse segundo caso

Caso 1



Caso 2



$u(1+r)$
$u(1)$
U_{FB}
$U_H(\varepsilon)$
ε
$\underline{\varepsilon}$
ε_M
$\overline{\varepsilon}$

Constrained efficient allocation

- Focar em alocações tais que:

$$c_{it} = \begin{cases} 1+r+\theta, \text{ se } y_{it} = 1+\varepsilon \\ 1+r-\theta, \text{ se } y_{it} = 1-\varepsilon \end{cases}$$

- Payoff desse arranjo, caso o indivíduo receba dotação $1+\varepsilon$

$$V(\theta) = (1-\beta)u(1+r+\theta) + \beta\left\{\frac{1}{2}u(1+r+\theta) + \frac{1}{2}u(1+r-\theta)\right\}$$

- Lembrando que:

$$U_H(\varepsilon) = (1-\beta)u(1+\varepsilon) + \beta\left\{\frac{1}{2}u(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}u(1-\varepsilon)\right\}$$

- Ou seja, função $V(\theta)$ possui o mesmo formato de $U_H(\varepsilon)$
  - Deslocada para cima por conta de r
  - $V(0) = u(1+r)$

Constrained efficient allocation

- Constrained efficient allocation: encontrar o menor valor de θ tal que o agente que recebeu $1+\varepsilon$ ainda aceite permanecer no arranjo

$$V(\theta) = \max\{U_{FB}, U_H(\varepsilon)\}$$

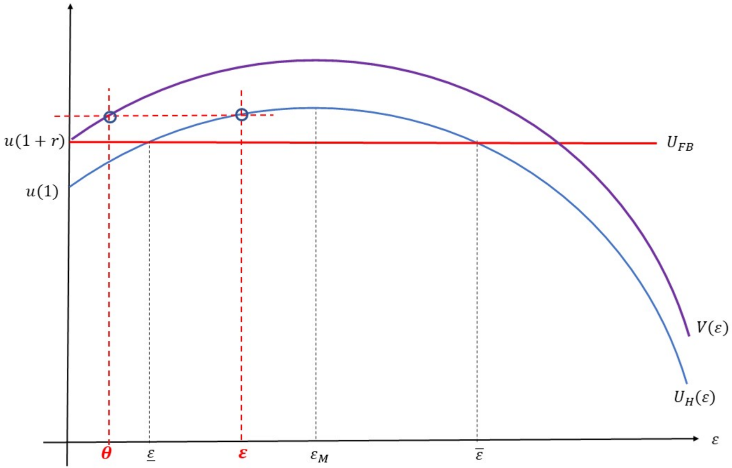
  - Maior grau de divisão de risco possível

- Para $\varepsilon < \underline{\varepsilon}$ e $\varepsilon > \overline{\varepsilon}$, first best é implentável $\Rightarrow \theta = 0$

- Para $\varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}]$, $U_H(\varepsilon) > U_{FB}$. Então, θ é tal que:

$$V(\theta) = U_H(\varepsilon)$$

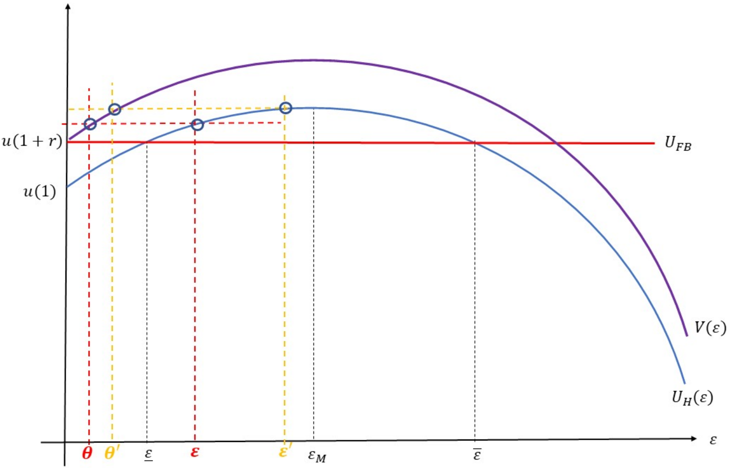
Constrained efficient allocation



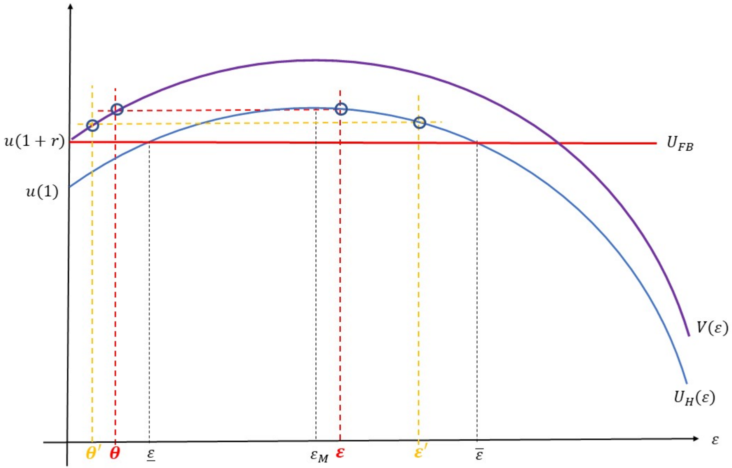
Constrained efficient allocation

- Note que, quando $\varepsilon < \varepsilon_M$, θ é crescente com ε
  - Aumento na dispersão de renda leva a aumento na dispersão no consumo
  - Ganho de renda corrente torna agentes que receberam $1+\varepsilon$ menos predispostos a aderirem arranjos de divisão de risco
  - Necessário compensá-los com mais consumo nesse estado
- Mas quando $\varepsilon > \varepsilon_M$, θ é decrescente com ε
  - Aumento na dispersão de renda leva a diminuição na dispersão no consumo
  - Nessa situação o aumento na volatilidade é grande o suficiente para tornar o arranjo de divisão de risco mais atrativo
  - Necessário fazer uma compensação menor ao agente que recebe $1+\varepsilon$ para mantê-lo no arranjo

$\varepsilon < \varepsilon_M$



$\varepsilon > \varepsilon_M$



Dispersão de renda vs dispersão de consumo