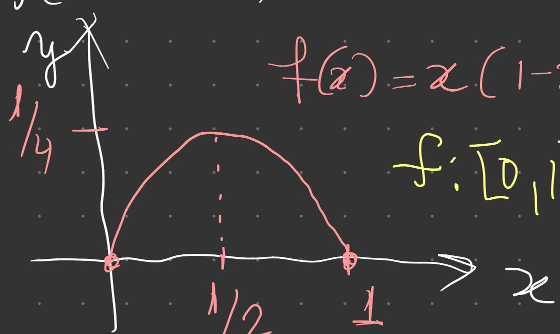
Valores extremos de funções contínuas

Def. Dizemos que $f: A \to \mathbb{R}$ possui máximo absoluto em A se $\exists\, c \in A$ tq. $f(x) \leq f(c)\ \forall\, x \in A$.

$f(c)$ é máximo absoluto e c pt. de máximo.

Analogamente, f possui mínimo absoluto em A se $\exists\, c \in A$ tq. $f(c) \leq f(x)\ \forall\, x \in A$. $f(c)$ é valor de mín. absoluto e c pt. de mínimo

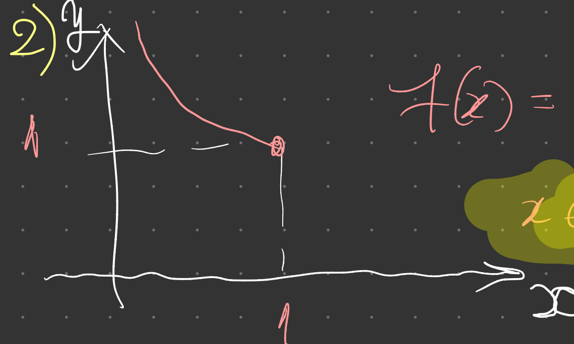
1)



$f(x) = x(1-x)$

$f: [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$

2)



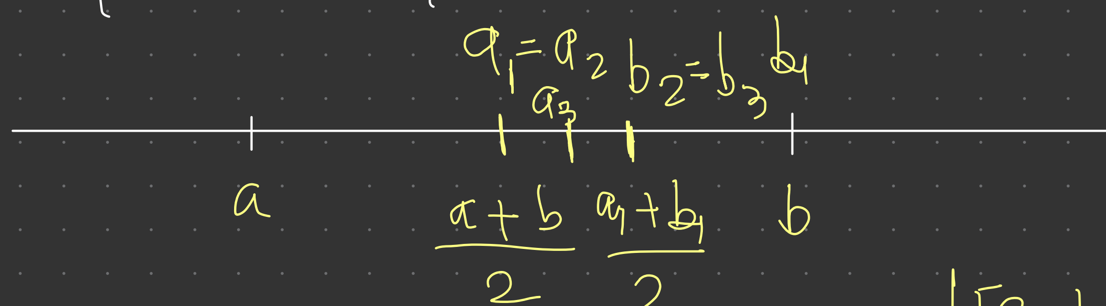
$f(x) = 1/x$

$x \in (0,1]$

Lema. Seja $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ função contínua. Então f é limitada em $[a,b]$.

<u>dem</u>. f limitada, se $\exists\, k>0$ t.q. $|f(x)|\le k$ em $[a,b]$.

Suponha por absurdo que não existe tal k.



$$|[a_n,b_n]| = \frac{b-a}{2^n}$$

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots$$

Considere agora $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}\subset[a,b]$

com $a\le a_1\le a_2\le\dots\le a_n\le\dots$ não decrescente.

$S \subset [a,b]$ ltdo $\rightsquigarrow \exists \sup S \in [a,b]$

$$\| \qquad (\beta-\delta, \beta+\delta)$$

$\therefore f(\beta) \in \mathbb{R}$. $\qquad \beta$

Como f é contínua em $[a,b]$, $\exists \delta > 0$ tq se $x \in N_\delta(\beta)$

$f(x) \in (f(\beta)-1, f(\beta)+1)$. ie. $|f(x)| \leq |f(\beta)| + 1$.

Isto nos leva a um absurdo pois $\exists N \in \mathbb{N}$ tq.

$[a_n, b_n] \subset N_\delta(\beta) \; \forall n \geq N$.

OBS: Como consequência do teorema anterior temos que

Se $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ é contínua, então f é ltda e existem

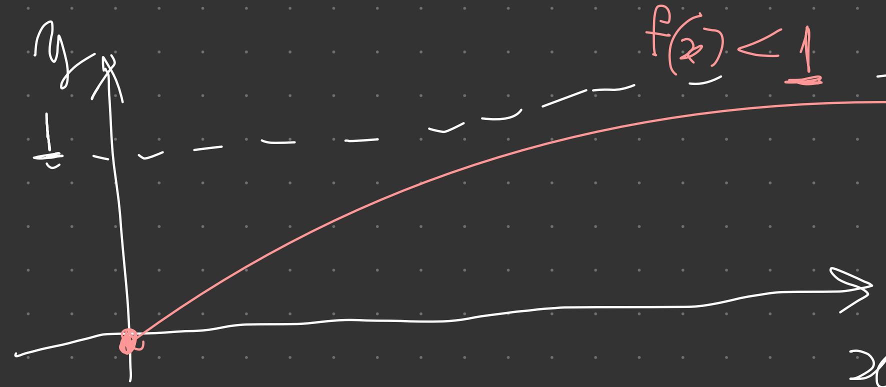
$$\sup f = \sup \{ f(x) : x \in [a,b] \} \quad \text{e}$$

$$\inf f = \inf \{ f(x) : x \in [a,b] \}.$$

Teo (Weierstrass) Seja $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua. Então existem $c, d \in [a,b]$ tais que $f(c) = \sup f$ e $f(d) = \inf f$.

Corolário: $\text{Imagem} f = [\inf f, \sup f] = [\min f, \max f]$.

Exemplo: 3)



$f : [0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}$

Prova Teo. de Weierstrass. Vamos verificar que $\exists\, c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \sup f$. O outro caso é análogo.

Suponha por absurdo que não $\nexists$ tal c i.e. $\sup f - f(x) > 0 \; \forall x$.

Seja $g(x) = \sup f - f(x)$, $x \in [a,b]$.

$g(x) > 0 \ \forall x \rightsquigarrow 0 < 1/g(x) \ \forall x \in [a,b]$.

$1/g(x)$ contínua em $[a,b] \longrightarrow \exists \ k > 0$ com $\dfrac{1}{g(x)} < k$

$\rightsquigarrow \ g(x) > 1/k > 0 \ \forall x \in [a,b]$ ie.

$\sup f - \dfrac{1}{k} > f(x) \ \forall x \in [a,b]$ $\cancel{\Downarrow}$ pois nesse caso

$\sup f - \dfrac{1}{k}$ é cota superior de imagem de f menor que $\sup f$.

$\blacksquare$