Matemática III (CCM0213) - Lista II de exercícios

Monitor: Victor van Driel

21 de outubro de 2021

Olá a todos. Esta lista tem como maior finalidade revisar os principais conceitos vistos em aula na forma de exercícios e exemplos. Não há prazo pois não é necessário entregá-la, no entanto eu estou disponível a qualquer momento para discutir os exercícios desta lista com vocês.

Mesmo que não seja obrigatório, é fortemente recomendado que vocês façam esses exercícios a fim de adquirir maior familiaridade com o conteúdo e com o que normalmente vocês farão nas provas da Sônia, tanto em caráter conceitual quanto técnico de resolução de exercícios.

Exercício 1 - Transformações lineares

Decida se as seguintes funções são transformações lineares.

(a) $D : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$; a boa e velha derivada
$f(x) \mapsto \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$

(b) $I : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$; a boa e velha integral
$f(x) \mapsto I\left[f\right](t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$

(c) $\mathcal{L} : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C})$
$f(x) \mapsto \mathcal{L}f = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right) + q(x)f(x)$
Chamamos $\mathcal{L}$ de operador de 2ª ordem na forma de Sturm-Liouville.

(d) $T : \mathcal{C}^1([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$
$f(x) \mapsto Tf = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx, \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}\right)$

(e) Seja V um espaço vetorial, e $y \in V$, $y \neq 0$. S é a transformação de translação, i.e: S: $V \to V$; $v \mapsto v + y$.

(f) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $v \mapsto R_\theta\, v$, com $R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$
Note que R é a transformação de rotação no plano real. Além disso, verifique se $R_\theta^{-1} = R_{(-\theta)}$

Exercício 2 - Representação matricial

Determine a representação matricial das transformações lineares a seguir. Caso não seja denotada uma base específica para o domínio e/ou o contradomínio, considere as bases canônicas correspondentes.

(a) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto Tp = (p(0), p'(1))$

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$
$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$

(c) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $B = \{(1,1), (1,-1)\}$
$x = (x_1, x_2) \mapsto Sx = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 4x_2)$

Exercício 3 - Determinante

Com os axiomas que definem função determinante em mente, decida (demonstre ou forneca um contra-exemplo) se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Determinantes são transformações lineares $\mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$.

(b) A função $f : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$f(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ é uma função que satisfaz homogeneidade e aditividade em cada linha.

(c) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Então tem-se que $\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$

(d) Para o sistema linear $Ax = 0$, tem-se que:
$x \neq 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Em particular, se a representação matricial de uma transformação linear T admite inversa, dizemos que T é um *isomorfismo* entre os espaços vetoriais que atua. Note que para isso, T tem de ser uma transformação *bijetora*.
Já adiantando, o item d é verdadeiro e é um passo fundamental para determinar

autovalores e autovetores de uma transformação linear em espaços de dimensão finita (ou seja, de forma correspondente, os autovalores e autovetores de sua representação matricial).

Exercício 4 - Teorema da Imagem e do Núcleo

Estude a demonstração do Teorema da Imagem e do Núcleo, um dos principais teoremas que fundamenta diversas características de transformações lineares, em particular a injetividade e sobretividade destas.

Seja V e W espaços vetoriais, dim$V < \infty$, e $T : V \to W$ transformação linear. Então tem-se:

$$\text{dim}(Ker(T)) + \text{dim}(Im(T)) = \text{dim}(V)$$

Uma pessoa que representa uma agência local de transformações lineares te aborda na rua, com ofertas tentadoras. A partir do Teorema do Núcleo e da Imagem, e do que você sabe sobre transformações lineares, decida se as ofertas podem ser legítimas, ou são conversa fiada:

(a) "O patrão ficou maluco: temos uma transformação linear T maravilhosa, $T : V \to W$ bijetora, com dim$W >$ dim$V$, saindo por 50% de desconto!! É só hoje!!"

(b) "Todas as nossas transformações lineares injetoras são certificadas: observa-se o selo dim$(Ker(T)) = 0$ em todas elas!"

(c) "Essa é especial: temos uma $T : V = \mathcal{M}_{2\times2} \to \mathbb{R}^2$ que é dada por $T(A) = (a_{11} + a_{22}, a_{21} + a_{22}), \forall A \in V$, com dim$(Ker(T)) = 2$."

(d) "Oferecemos isomorfismos de $\mathcal{M}_{6\times6}$ para $\mathbb{R}^6$ a preço de banana!"

(e) "A transformação linear do Exercício 2, item (b), é o nosso carro-chefe de isomorfismos do $\mathbb{R}^3$ para $\mathcal{MS}_{2\times2}$."

Lembrete: considerando os casos em que dim$(W) < \infty$, podemos determinar dim$(Im(T))$ a partir da representação matricial de T, uma vez que

$$dim(Im(T)) = posto(T) = rank(T) \tag{1}$$

O posto de uma matriz é, entre outras características, o número de linhas (ou colunas) **linearmente independentes** da matriz (linhas ou colunas não nulas quando a matriz se encontra em sua forma escalonada).

Exercício 5 - Transformações simétricas e antissimétricas

Considerando as definições de transformações simétricas e antissimétricas, juntamente com as condições de cada item, demonstre que:

(a) Em $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ com o produto interno $< h|k >= \displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)k(x)dx$, a transformação linear $T : V \to V$
$p \mapsto T[p](x) = p(-x)$ é simétrica.

(b) Em $V = \mathcal{P}^0(\mathbb{R}) \equiv$ espaço dos polinômios reais que se anulam em -1 e em 1, com o produto interno $< h|k >= \displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)k(t)dt$, a transformação linear $D : V \to V$ dada por
$p(x) \mapsto T[p](x) = p'(x)$ é antissimétrica.

(c) Se V é um espaço vetorial euclidiano sobre $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ é linear e antissimétrica, e considerando que $\exists v \in V, v \neq 0$, tal que $Tv = \lambda v$, então segue que $\lambda = 0$.

Exercício 6 - **Para pensar um pouco (mas só um pouco)...**

Aqui estão alguns exercícios mais descontraídos ou miscelâneos, uma espécie de seção bônus/revisão geral da lista.

(a) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,2) = (1,1,1)$ e $T(3,3) = (2,2,2)$.
Decida se T é injetora, e calcule $T(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Seria verdadeiro afirmar que T leva pontos do plano para uma reta no $\mathbb{R}^3$?

(b) Considere as transformações lineares do Exercício 1, dos itens (a) e (b). Elas são injetoras? Sobrejetoras? Existe uma representação matricial para cada uma dessas transformações?

(c) Mostre que transformações lineares preservam a dependência linear de conjuntos enumeráveis de vetores **linearmente dependentes**. A seguir, prove que se a transformação linear preserva *independência* linear, ela tem de ser uma transformação linear **injetora**. *Dica:* Para a 2ª parte, tente demonstrar a contrapositiva: Se a transformação não é injetora, ela não preserva l.i.

(d) Seja V um espaço vetorial euclidiano real de dimensão n, $n \in \mathbb{N}$, $T : V \to V$ uma transformação linear e B uma base ortogonal de V.
Mostre que a representação matricial da transformação linear em uma base ortogonal preserva a sua simetria, isto é:

- Se T é simétrica $\Rightarrow$[T]$_{BB} \in \mathcal{MS}_{n\times n}$
- Se T é antissimétrica $\Rightarrow$T$_{BB} \in \mathcal{MA}_{n\times n}$