Funções Compostas

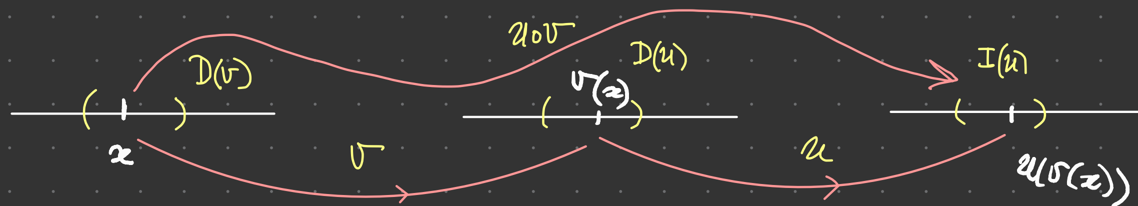
imagem

Def. Sejam $u: D(u) \longmapsto I(u)$ e $v: D(v) \longmapsto I(v)$ duas funções.

domínio

Chamamos $f(x) = u(v(x)) = (u \circ v)(x)$, $\quad x \in D(v)$, $I(v) \subset D(u)$

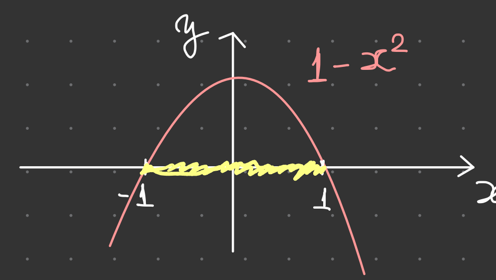
a composição de u com v.



Exemplo. $u(x) = \sqrt{x}$ e $v(x) = 1 - x^2$

$u \circ v(x) = \sqrt{1 - x^2}$ que está definida se $1 - x^2 \geq 0$

ie se $x \in [-1, 1]$.



Teo. Assuma v contínua em p e u contínua em $q = v(p)$.
Então a função composta $f(x) = (u \circ v)(x)$ é contínua em p.

dem. <u>QM</u>. dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq $0 < |x - p| < \delta$ implica

$$|u(v(x)) - u(v(p))| < \varepsilon.$$

Como u é contínua em $q = v(p)$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |y - q| < \delta_1 \implies |u(y) - u(q)| < \varepsilon.$$

Como v é contínua em p, para $\delta_1 > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \implies |v(x) - v(p)| < \delta_1$$

$\therefore$ se $0 < |x - p| < \delta$, então $|v(x) - q| < \delta_1 \implies |u(v(x)) - u(q)| < \varepsilon$

$$\implies f \text{ é contínua em } x = p.$$

$\blacksquare$

Exemplos.

1) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ é uma função contínua em x, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é contínua em $[-1, 1]$.

$\delta > 0$

$(p - \delta, p + \delta)$

OBS: No exemplo 2 estamos utilizando o conceito de continuidade à direita e à esquerda de maneira implícita.

Def: Dizemos que f é contínua à direita em $x = p$ se

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = f(p).$$

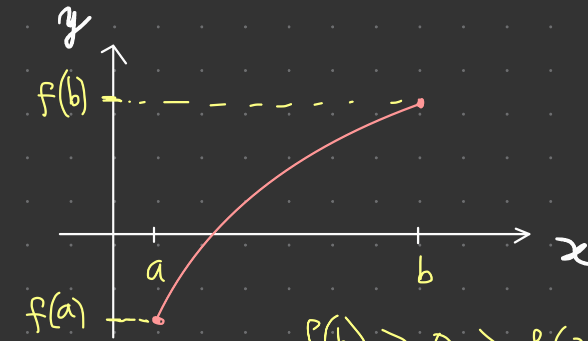
Analogamente dizemos que é contínua à esquerda se

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = f(p)$$

Teo (Teorema de Bolzano) Seja $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ contínua. Assuma que $f(a)f(b)<0$ ($f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais trocados). Então existe $c\in(a,b)$ tq. $f(c)=0$.

$$f:[a,b]\mapsto\mathbb{R} \qquad c\in(a,b)$$

Lema Seja f uma função contínua em c com $f(c)\neq 0$. Então existe $\delta>0$ tal que f possui o mesmo sinal de $f(c)$ em $N(c)=(c-\delta, c+\delta)$.



$f(b) > 0 > f(a)$

dem. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tq.

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon \iff f(c)-\varepsilon < f(x) < f(c)+\varepsilon$$

sempre que $0<|x-c|<\delta$.

Spg. $f(c)>0$. Basta tomar $\varepsilon = f(c)/2 > 0$. Assim

$$f(x) > f(c) - f(c)/2 = f(c)/2 > 0$$

sempre que $0<|x-c|<\delta$.

Prova Teo de Bolzano

Spg. supomos $f(a) < 0 < f(b)$.

Considere $S = \{ x \in [a,b] \; ; \; f(x) \leq 0 \}$.

(i) $S \neq \phi$ pois $f(a) < 0 \rightsquigarrow a \in S$.

(ii) $S \subset [a,b] \rightsquigarrow S$ é ltdo $\rightsquigarrow \exists \; c = \sup S \in [a,b]$.

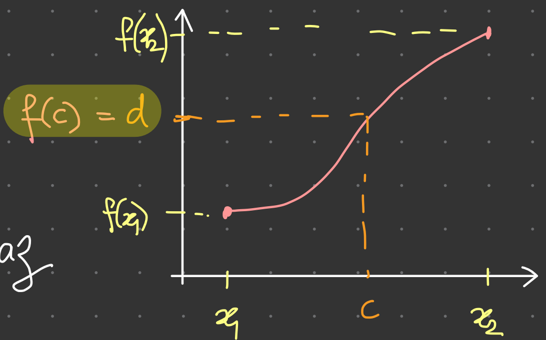
Afirmação. $f(c) = 0$.

Se $f(c) > 0$, f contínua em $[a,b] \longrightarrow \exists$ vizinhança $N(c)$ de c tal que $f(x) > 0 \;\forall\, x \in N(c)$. Em particular $\exists \; \bar{c} \in N(c)$, $\bar{c} < c$ com $f(\bar{c}) > 0$. Assim $\bar{c}$ é cota superior para S menor que c $\#$.

De maneira análoga se verifica que $f(c)$ não é menor que 0.

$$\therefore \; f(c) = 0 \qquad \blacksquare$$

Teo (Valor intermediário) $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ contínua. Então para pts $x_1 < x_2$ arbitrários em $[a,b]$ com $f(x_1) \neq f(x_2)$ temos que f assume todos os valores entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ em algum ponto no intervalo (x_1, x_2).



dem. Spg. $f(x_2) > f(x_1)$ com $d \in (f(x_1), f(x_2))$

Seja $g(x) = f(x) - d$.

$g: [x_1, x_2] \longmapsto \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz

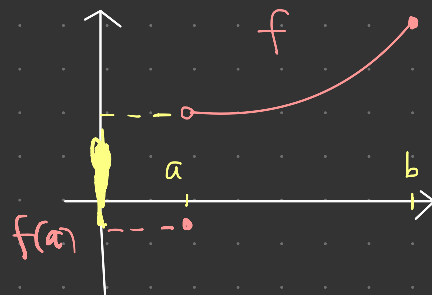
$$g(x_1)\, g(x_2) = \underbrace{(f(x_1) - d)}_{<0} \underbrace{(f(x_2) - d)}_{>0} < 0.$$

Pelo Teo de Bozano $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tq $g(c) = 0$.

$\therefore \; 0 = f(c) - d \rightsquigarrow f(c) = d$.

$\boxtimes$

OBS: f contínua num intervalo fechado é uma condição necessária.



f contínua em $(a,b]$

mas descontínua em $[a,b]$.

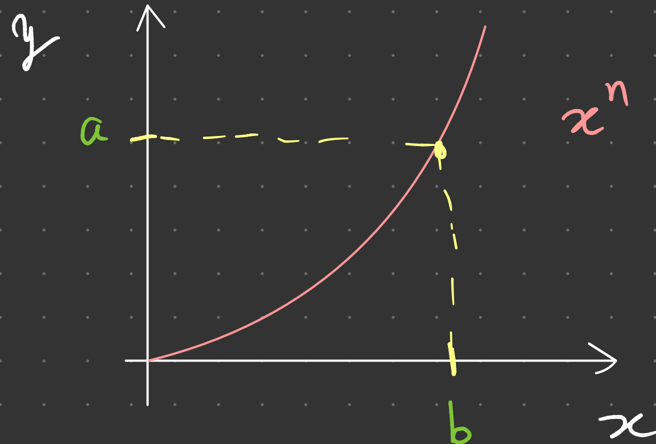
Exemplo Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a>0$ Então $\exists!\ b>0$ tq. $b^n = a$.

dem. Seja $c > a > 0$ com $c > 1$. Assim $c^n > c > a > 0$.

Considere $f(x) = x^n$ em $[0,c]$. $f(0) = 0 < a < c < f(c)$.

Como f é contínua, $\exists\ b \in (0,c)$ tq $f(b) = a$ ie $b^n = a$.

A unicidade segue do fato de f ser uma função estritamente crescente. $\blacksquare$



$f(x) = x^n \,,\; x \geq 0$

é estritamente crescente.

$b^n = a$