Limite de Funções de duas Variáveis

Exemplos

1) Verificar se o limite existe

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

1º) Aproximação de (0,0) ao longo do eixo Ox.

Tomando $y=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, para todo $x \neq 0$

2º) Aproximação de (0,0) ao longo do eixo Oy

Tomando $x=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$, para todo $y \neq 0$

Nesta análise a função apresenta dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, portanto o limite não existe. Ou seja, $C_1 \to 1$ e $C_2 \to -1$, logo $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

1º) Aproximação de (0,0) ao longo do eixo Ox

Tomando $y=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2.0}{(x)^4+(0)^2} = \dfrac{0}{x^4} = 0$, para todo $x \neq 0$

2º) Aproximação de (0,0) ao longo do eixo Oy.
Tomando $x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0.y}{(0)^4+y^2} = 0, \text{ para todo } y\neq 0$$

3º) Aproximando (x,y) ao longo da reta $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(x,mx)} \frac{2x^2.(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(x,mx)} \frac{2x^3m}{x^4+m^2x^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x,mx)} \frac{2\cancel{x^3}m}{\cancel{x^2}(x^2+m)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xm}{x^2+m} = 0$$

$(x,y)\to(0,0)$

4º) Aproximando (x,y) ao longo da parábola $y=mx^2$

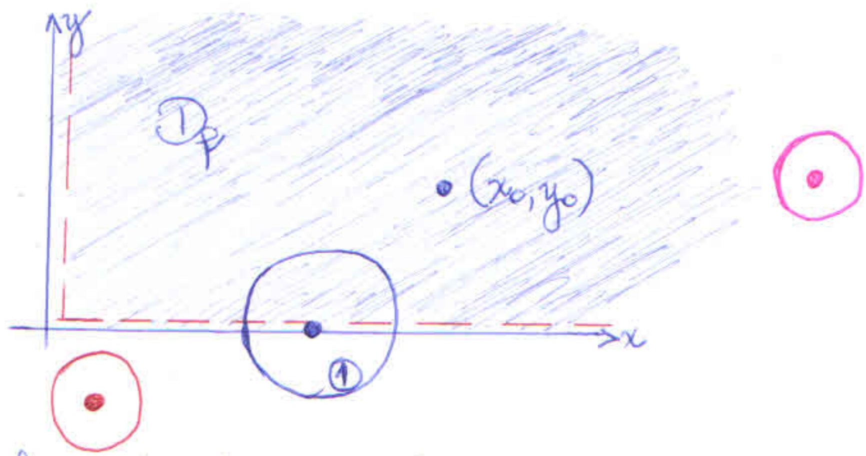
$$\lim_{(x,y)\to(x,mx^2)} \frac{2x^2.mx^2}{x^4+(mx^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(x,mx^2)} \frac{2m\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+m^2)} = \frac{2m}{(1+m^2)}$$

$(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

$$\{C_1, C_2, C_3 \neq C_4\}$$

Ponto de Acumulação em D



É possível calcular o lim (x_0, y_0) dentro do Dom_f e também o limite em 1. Se o ponto está dentro do Dom. é possível calcular a função e o limite. Se o ponto está na região próxima a 1 não poderemos calcular a função, mas é possível saber para os outros pontos próximos quanto valerá a função. Não será possível calcular o limite de pontos fora do Dom.

Teorema Complementar aos Slides

Seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação do $Dom f$.

Suponha: $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y)$ e suponha também γ uma curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \; t \in I$$

tal que
$$\begin{cases} \gamma(t) \in D, \; \forall t \in I \\ x \text{ e } y \text{ são funções contínuas em } t_0 \\ \gamma(t_0) = (x_0, y_0) \text{ e } \gamma(t) \neq (x_0, y_0) \text{ para } t \neq t_0 \end{cases}$$

Se todas as condições forem atendidas é garantido que:

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{t} \to \underbrace{(x_0,y_0)}_{t_0}} f(\gamma(t)) = L$$

Esse Teorema se aplica para funções onde os valores encontrados são diferentes e sendo assim o limite não existe.

Exemplos de Função Limitada

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x} \cdot \cos y$ $\qquad [-1;1]$

$0 \leq |\cos x| \leq 1$

$= \underbrace{0 \cdot \text{função}}\ \text{ltda}$

$= 0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1+y}{y}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{0}\right)$

$[-1;1]$

$= 0 \cdot \text{função ltda}$

$= 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3y) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$

$\to x=0 \quad \frac{0}{0+y^2} = 0$

$\to y=0 \quad \frac{x^2}{x^2+0} = 1$

$(3y) \to\ = 0$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$= 0 .$ função limitada

$= 0$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y^3}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3x.\underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)}_{\substack{\text{fç limitada} \\ \Downarrow \\ [0,1]}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4y.\underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}_{\substack{\text{fç limitada} \\ \Downarrow \\ [0,1]}}$$

$$= 0.[\quad] + 0[\quad]$$

$= 0$ (Zero)

Exemplo de Função Contínua - Função de n Variáveis

Determinar se a função é contínua em (0,0).

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Obs.: $y \cdot \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad y=0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+y} = \dfrac{1}{x} \uparrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$r(t,t) \to \lim_{(x,y)\to(t,t)} f(t,t) = \frac{t \cdot t}{t^2+t^2} = \frac{\cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}} = \frac{1}{2}$$

$$r'(t,0) \to \lim_{(x,y)\to(t,0)} f(t,0) = \frac{t \cdot 0}{t^2+(0)^2} = 0$$

$$r(t^2,t^2) \to \lim_{(x,y)\to(t^2,t^2)} f(t^2,t^2) = \frac{\cancel{t^4}}{2\cancel{t^4}} = \frac{1}{2}$$

O limite não existe. A função não é contínua na origem porque não vale a igualdade $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

b) $f(x,y) \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)}}_{3} 3 \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda}} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} y}_{0} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$f(0,0) = 0$$

Portanto f é contínua em $(0,0)$ pois,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$$