

LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais



LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) .

Dizemos que o limite de $f(x, y)$, quando (x, y) tende a (a, b) , é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que se $(x, y) \in D$ e

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Para calcular o $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$, é preciso entender como é o comportamento desta expressão

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L,$$

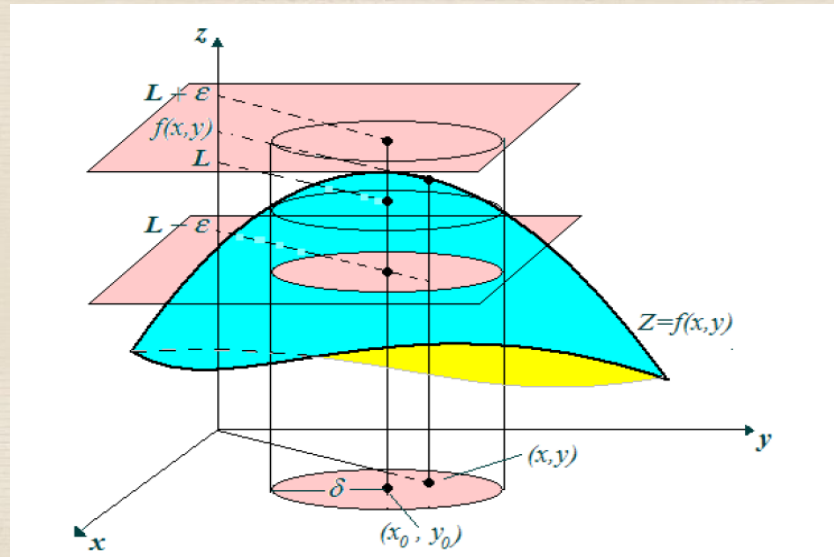


Figura 1

LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Teste dos diferentes caminhos para a não existência do limite

Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ não existe.

LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções de qualquer maneira que se queira

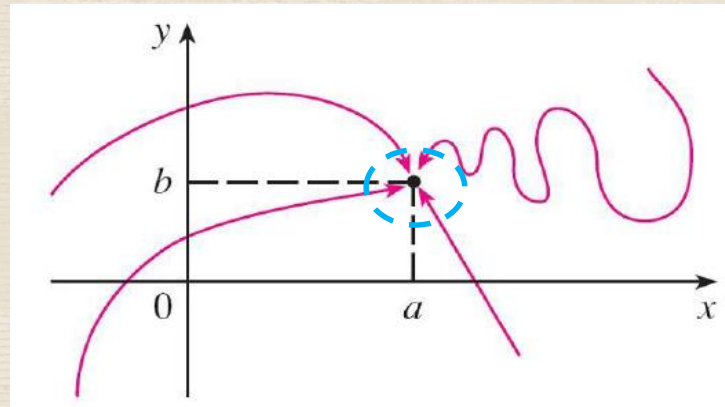


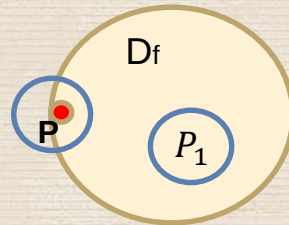
Figura 2

LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Ponto de Acumulação

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $p_0 \in A$. Dizemos que p_0 é um ponto de acumulação de A se :

$$\forall \varepsilon > 0, B(p_0) \cap A \neq \{p_0\} \text{ e } \neq \emptyset$$



LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Função Limitada

Uma função de duas variáveis $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, é limitada se existir um número real M tal que $|f(x, y)| \leq M$, para todo $(x, y) \in A$.

Exemplo: Verificar se $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ é limitada, pois para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $|\sin(x + 2y)| \leq 1$.

LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

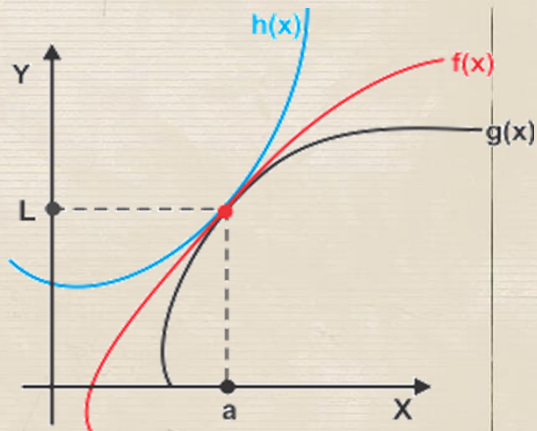
O cálculo do limite de funções de duas variáveis pode ser simplificado, usando o **Teorema do Confronto** e as propriedades de limite.

Se $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ para $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \epsilon, \epsilon > 0$ e se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = L$$

então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L$$

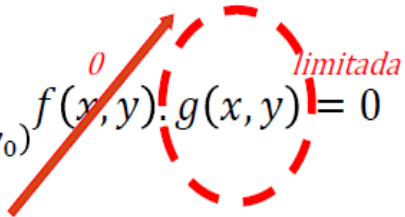


LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Teorema de Infinitésimo

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq M$ para $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \epsilon$,

tais que $\epsilon, M > 0$, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$$


LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Continuidade de Função

Dizemos que a função $f(x, y)$ é contínua em um ponto (a, b) se, e somente se, são válidas as seguintes condições:

- (i) $f(a, b)$ existe
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe
- (iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

↪ Considerar $(a, b) \rightarrow (x_0, y_0)$