MAP 2220 - Fundamentos de Análise Numérica - BMAC 2021
Notas sobre Integração - Repitição de Métodos

1 Ideia Geral

Em vez de aumentar o grau do polinômio interpolador nas fórmulas de Newton-Cotes para aproximar a integral de uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode-se usar a propriedade que $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual tamanho, $d_n = \frac{b-a}{n}$, e usar em cada um destes subintervalos o método dos trapézios ou de Simpson.

O nome tradicional desse processo é Método dos trapézios (ou de Simpson) com repetições. Aqui vai–se chamar Método dos n-Trapézios (resp. Método n–Simpson) ao uso do Método dos trapézios (resp. Método de Simpson) com subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{n}$.

Como de hábito suponha que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função suficientemente regular.

2 Método dos n-trapézios

Sejam $n \geq 2$ um natural e $d_n = \frac{b-a}{n}$.

Tome os pontos $x_j = a + jd_n,\ j = 0, 1, \ldots, n$ (note que, para todo n, tem–se $x_0 = a$ e $x_n = b$).

Ao aplicar o métodos dos trapézios no intervalo $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, com $j = 1, \ldots, n$, para aproximar a integral de $f(x)$ nesse intervalo obtém–se

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = \frac{d_n}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) + E_j,\ \text{com } |E_j| \leq \frac{d_n^3}{12} \max_{\xi\in I_j} |f''(\xi)|.$$

Como $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$, se $M_2 = \max\limits_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|$, resulta do cálculo anterior (some as estimativas de erro use que $d_n = \frac{b-a}{n}$):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{d_n}{2}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)] + T,\ \text{com } |T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad (1)$$

3 Método de n-Simpson

Como antes, tome um natural $n \geq 2$ e seja $d_n = \frac{b-a}{n}$.

A ideia é dividir $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento d_n cada um e aplicar o método de Simpson a cada um deles.

Para usar o método de Simpson são usadas as extremidades do intervalo e o seu ponto médio, assim, neste caso, vão-se considerar os pontos x_j obtidos pela divisão de $[a, b]$ e seus pontos médios, isso explica porque a distância entre x_{j-1} e x_j é $h_n = \frac{d_n}{2}$.

Assim, considere os pontos $x_j = a + jh_n,\ 0 \leq j \leq 2n$ (mais uma vez veja que, para todo n, $x_0 = a$ e $x_{2n} = b$) e aplique Simpson ao intervalo $I_j = [x_{2(j-1)}, x_{2j}],\ j = 1, \ldots, n$, para obter

$$\int\limits_{x_{2(j-1)}}^{x_{2j}} f(x)dx = \frac{h_n}{3}(f(x_{2(j-1)}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})) + E_j,.$$

com $|E_j| \leq \frac{h_n^5}{90} \max\limits_{\xi \in I_j} |f^{(4)}(\xi)|$.

Portanto, se $M_4 = \max\limits_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$, então $|E_j| \leq \frac{h_n^5}{90} M_4$ para todo j e como há n intervalos,

$$\sum_{j=1}^{n} E_j \leq n\frac{h_n^5}{90} M_4 = n\frac{(b-a)^5}{32n^5}\frac{M_4}{90} = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4.$$

Então, como Como $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{j=1}^{n} \int_{x_{2(j-1)}}^{x_{2j}} f(x)dx$, as considerações anteriores implicam de pronto que

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h_n}{3}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + f(b)] + T_2, \qquad (2)$$

com $|T_2| \leq \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4$.