ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Dinâmica do Ponto – Parte 2

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

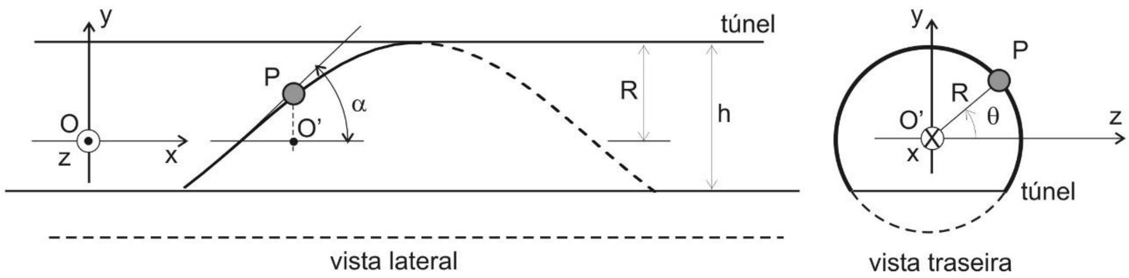
PME3100 Mecânica I

DINÂMICA DO PONTO

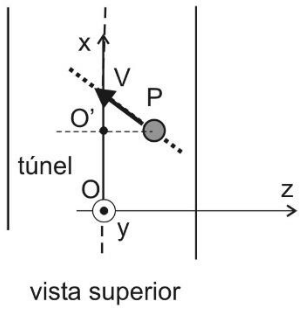
Exemplo 3: (ponto vinculado) - Túnel

O vídeo "*Michael Schumacher in the SLS AMG tunnel experiment (long-version) Ridgeway Mercedes-Benz.mp4*", disponível em www.youtube.com/watch?v=AvpSYrXdmio, mostra uma manobra acrobática com um automóvel dentro de um túnel. Uma manobra similar, com bicicleta, é mostrada no vídeo "*BMX_Full_Loop_Attempt_-_Red_Bull_Full_Pipe_part_3.mp4*", disponível em www.youtube.com/watch?v=BB_KnqCXbcQ.

Vamos adotar um modelo físico simplificado para a manobra com o carro, ilustrado na figura abaixo, com as seguintes hipóteses:



Túnel cilíndrico - Ponto em trajetória helicoidal de passo constante



Modelo físico (hipóteses):

- o túnel será representado por uma superfície cilíndrica de raio R;
- o veículo será representado por um ponto material P de massa M;
- o movimento se inicia no ponto a uma distância h do topo do túnel, com a direção do veículo fazendo um ângulo de entrada α com o eixo daquele;
- a trajetória se desenvolve na superfície cilíndrica do túnel. Supõe-se que o ângulo de avanço α seja constante, ou seja, a trajetória é helicoidal de passo constante – isso corresponde a supor que não existam deslizamentos laterais do veículo;
- o piloto, além de manter o volante fixo, não acelera nem freia o veículo durante toda a manobra, ou seja, não há dissipação nem fornecimento de energia ao veículo.
- para o vídeo citado, vamos adotar os valores aproximados: $\alpha = 30°$, $\mathrm{R} = 4$ m e $\mathrm{h} = 6$ m.

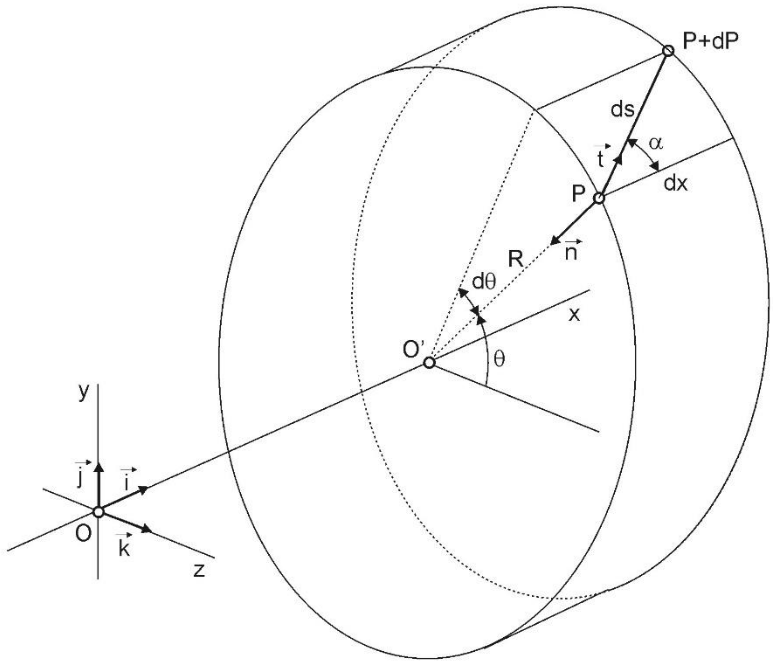
O ponto O' é a projeção ortogonal do ponto P no eixo Ox, e o ângulo θ é o ângulo que o segmento $O'P$ faz com a reta paralela a Oz que passa por O'.

Vamos fazer um cálculo aproximado dos seguintes valores:

(a) a velocidade mínima que o carro deve ter ao iniciar a manobra (começar a subir a parede do túnel);

(b) o comprimento mínimo do túnel necessário para completar a manobra;

(c) o tempo gasto para realizar a manobra.



Resultados anteriores:

- raio de curvatura da trajetória: $\rho = \frac{R}{sen^2\alpha}$
- nas coordenadas intrínsecas $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$:

$\vec{j} = sen\alpha \cdot cos\theta\vec{t} - sen\theta\vec{n} + cos\theta \cdot cos\alpha\vec{b}$

Aceleração tangencial: $\vec{a}_t = \dot{V}\vec{t}$

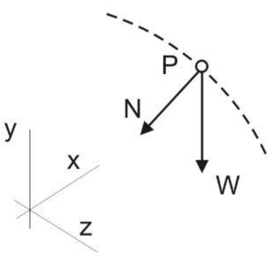
Aceleração normal: $\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \frac{sen^2\alpha}{R}V^2\vec{n}$

Aceleração total: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dot{V}\vec{t} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \dot{V}\vec{t} + \frac{sen^2\alpha}{R}V^2\vec{n}$

Resolução:

Item (a):

$\vec{W}$ é o peso de *P*:



$$\vec{W} = -Mg\vec{j} = -Mg\left(sen\alpha \cdot cos\theta\vec{t} - sen\theta\vec{n} + cos\theta \cdot cos\alpha\vec{b}\right)$$

$\vec{N}$ é a reação da trajetória sobre *P*:

$$\vec{N} = N_t\vec{t} + N_n\vec{n} + N_b\vec{b}$$

Temos, supondo que o ponto *P* desloca-se sem atrito na direção da sua trajetória:

$$\vec{N} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow N_t = 0 \Rightarrow \vec{N} = N_n\vec{n} + N_b\vec{b}$$

Lei fundamental:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{P} = M\vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_n\vec{n} + N_b\vec{b} - Mg\big(sen\alpha \cdot cos\theta\, \vec{t} - sen\theta\, \vec{n} + cos\theta \cdot cos\alpha\, \vec{b}\big) = M\left(\dot{V}\vec{t} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -g \cdot sen\alpha \cdot cos\theta = \dot{V} \\ N_n + Mgsen\theta = M\frac{V^2}{\rho} \\ N_b - Mgcos\theta \cdot cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Em $\theta = 90°$, no ponto mais alto da trajetória:

$$\begin{cases} 0 = \dot{V} \\ N_n + Mg = M\frac{V^2}{\rho} \\ N_b = 0 \end{cases}$$

Assim, para $N_n \geq 0$ (condição de não perder contato no ponto mais alto):

$$V^2 \geq g \cdot \rho$$

Desta forma, a velocidade mínima no ápice da trajetória será:

$$V_{min} = \sqrt{g \cdot \rho} = \sqrt{g \cdot \frac{R}{sen^2\alpha}} = \sqrt{9{,}81 \cdot \frac{4}{sen^2 30°}} = 12{,}5\ m/s$$

Pelo Teorema da Energia Cinética, entre o piso do túnel e o ponto mais alto da trajetória, temos:

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_{min}^2 + Mgh$$

Portanto:

$$V_0^2 = V_{min}^2 + 2gh = \left(\frac{R}{sen^2\alpha} + 2h\right)g = \left(\frac{4}{sen^2 30°} + 2 \cdot 6\right) \cdot 9{,}81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_0 = 16{,}6\ m/s = 60\ km/h}$$

Item (b):

Da equação (1) anterior temos:

$$x = \frac{R}{tg\alpha}\,(\theta - \theta_o)$$

No início do movimento $\theta_0 = -30° = -\frac{\pi}{6}rad$ e, no final, $\theta = 210° = \frac{7\pi}{6}rad$. Assim:

$$\Delta x = \frac{R}{tg\alpha}\frac{4\pi}{3} = \frac{4}{\tan 30°}\frac{4\pi}{3} \cong \boldsymbol{29\ m}$$

Obs.: para uma volta completa no cilindro, a distância longitudinal percorrida seria:

$$\Delta x = \frac{R}{tg\alpha}2\pi = \frac{4}{\tan 30°}2\pi \cong 44\ m$$

Item (c):

Sabemos que:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{V_x}$$

Do TEC:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 - Mgy \Rightarrow V^2 = \left(\frac{R}{sen^2\alpha} + 2h\right)g - 2gR\ sen\theta$$

Temos:

$$\vec{V} = V\vec{t} = V\big(cos\alpha\, \vec{\imath} + sen\alpha \cdot cos\theta\, \vec{\jmath} - sen\alpha \cdot sen\theta\, \vec{k}\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = Vcos\alpha = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{sen^2\alpha} + 2h\right) g - 2gR\ sen\theta}\right) cos\alpha$$

Da equação (1):

$$dx = \frac{R.d\theta}{sen\alpha} cos\alpha$$

Assim:

$$dt = \frac{dx}{V_x} = \frac{\frac{R.d\theta}{sen\alpha} cos\alpha}{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{sen^2\alpha}+2h\right)g-2gR\ sen\theta}\right)cos\alpha} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{cosec^2\alpha}{2}+\frac{h}{R}\right)-\ sen\theta}}\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2g}\cdot sen\alpha}\right)$$

Portanto:

$$\Delta t = \left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2g}\cdot sen\alpha}\right)\cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{cosec^2\alpha}{2}+\frac{h}{R}\right)-\ sen\theta}}$$

Esta integral pode ser calculada numericamente, com θ entre -30º e 210º. Por outro lado, o enunciado pede um cálculo aproximado e, assim, vamos considerar que:

- A velocidade mínima (no ápice da trajetória) é de 12,5 m/s, cuja projeção na direção horizontal é:
  $v_x = 12{,}5 \cos 30° \cong 10{,}8\ m/s$
- A velocidade máxima (inicial) é de 16,6 m/s, cuja projeção na direção horizontal é:
  $v_x = 16{,}6 \cos 30° \cong 14{,}4\ m/s$

Se o movimento ocorresse com a velocidade mínima constante, o tempo decorrido para percorrer 29 m seria de:

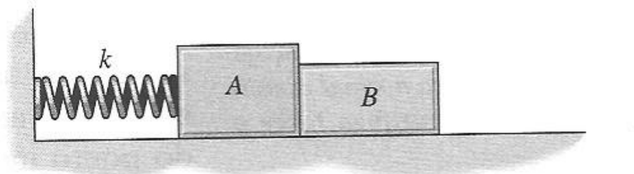
$$\Delta t = \frac{29}{10{,}8} = 2{,}7\ s$$

Se o movimento ocorresse com a velocidade máxima constante, o tempo decorrido seria de:

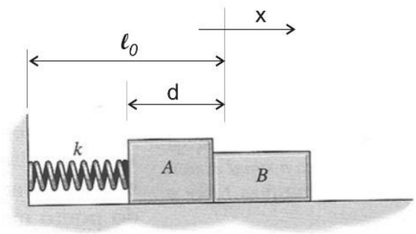
$$\Delta t = \frac{29}{14{,}4} = 2{,}0\ s$$

Portanto, o tempo decorrido estaria entre esses valores, e o resultado para um cálculo aproximado poderia ser a média de ambos, ou seja, igual a **2,4*s***.

Exemplo 4: (DP.1) O bloco A tem massa m_A e está preso a uma mola não deformada de rigidez k e comprimento l_0. Se o bloco B de massa m_B é pressionado contra A e a mola se deforma uma distância d, determine a distância que ambos os blocos deslizam sobre a superfície lisa antes de se separarem da mola. Qual é a velocidade no momento da separação?



Resolução:



TEC: $\Delta T = \tau_{mola} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$ (1)

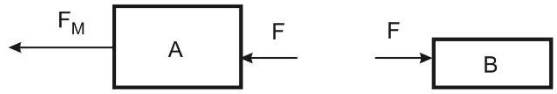
Separação: força de contato F é nula

Mola: $F_M = kx$

TR: Bloco A:

$\sum F_x = m_A a_{Ax} \Rightarrow -F_M - F = m_A a_{Ax} \Rightarrow$
$\Rightarrow -kx - F = m_A a_{Ax}$ (2)

Bloco B: $\sum F_x = m_B a_{Bx} \Rightarrow F = m_B a_{Bx}$ (3)

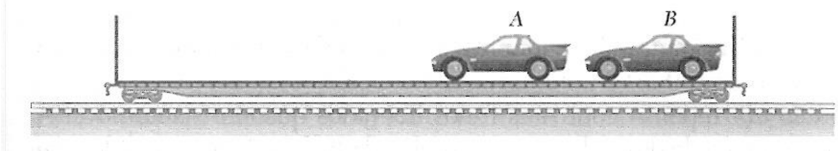


Enquanto houver contato, $a_{Ax} = a_{Bx} = \ddot{x}$; substituindo em (2) e (3) e eliminando $\ddot{x}$:

$F = -\frac{m_B k}{m_A + m_B}x = 0 \Rightarrow x = 0$

Substituindo em (1): $\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}k(0^2 - d^2) \Rightarrow \boldsymbol{v = d\sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}}}$

Exemplo 5: (DP.5) O carro A, com 1800 kg de massa, e o carro B, com 1700 kg de massa, estão em repouso sobre um vagão com 20 Mg de massa que também se encontra em repouso. Os carros A e B então aceleram e rapidamente atingem velocidades constantes em relação ao vagão de 2,35 m/s e 1,175 m/s, respectivamente, para depois desacelerar até pararem totalmente na extremidade oposta do vagão. Desprezando o atrito e a resistência ao rolamento, determine a velocidade do vagão quando os carros estão se movendo com velocidades constantes.



Resolução:

- velocidade (absoluta) do vagão: V
- velocidades dos carros, relativas ao vagão: $v_{A,r}$ e $v_{B,r}$
- velocidades absolutas dos carros: $v_A = v_{A,r} + V$ e $v_B = v_{B,r} + V$
- sentidos positivos: para a esquerda

Não há forças externas horizontais atuando no conjunto vagão + carros; portanto, a quantidade de movimento horizontal desse conjunto (que é a soma das quantidades de movimento de cada elemento) permanece nula:

$$Q_x = Q_{Vx} + Q_{Ax} + Q_{Bx} = MV + m_A v_A + m_B v_B =$$

$$= MV + m_A\left(v_{A,r} + V\right) + m_B\left(v_{B,r} + V\right) =$$

$$= (M + m_A + m_B)V + m_A v_{A,r} + m_B v_{B,r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = -\frac{m_A v_A + m_B v_B}{(M + m_A + m_B)} = -\frac{1800 \cdot 2{,}35 + 1700 \cdot 1{,}175}{20000 + 1800 + 1700} = -\frac{4230 + 1997{,}5}{23500} \Rightarrow$$

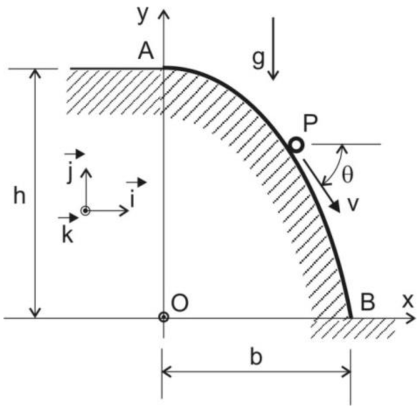
$$\Rightarrow \boldsymbol{V = -0{,}265\ m/s}$$

Exemplo 6: O ponto material P, de massa m, desloca-se no plano vertical Oxy sob a ação da gravidade, deslizando sem atrito sobre um "tobogã", representado na figura pela curva plana AB, definida pela equação $y = h(1 - x^2/b^2)$. No instante inicial, o ponto P é largado na posição A, com uma velocidade horizontal v_0 para a direita. Nestas condições:

a) faça o diagrama de corpo livre do ponto P, e obtenha a relação das componentes a_x e a_y da sua aceleração, em função de θ e dos esforços aplicados;

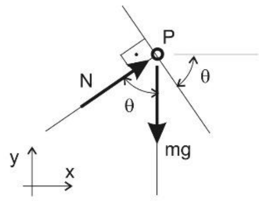
b) obtenha o valor máximo da velocidade inicial v_0 para que o ponto P não perca contato com o tobogã em nenhum instante durante o movimento.

c) indique as forças que realizam trabalho durante o movimento, justificando a resposta, e obtenha a expressão do módulo da velocidade que o ponto P terá na posição B, em função da velocidade inicial e dos dados da figura;



d) expresse a velocidade de P em função de θ e determine os versores de Frenet $\vec{t}$ e $\vec{n}$.

Resolução:



a) Pela 2ª lei de Newton, temos:

$$ma_x = N \sin\theta \qquad (1)$$

$$ma_y = N\cos\theta - mg \qquad (2)$$

b) A força normal de contato N não pode ser negativa; no limite, esta força é nula.

Da equação (1), temos:

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_0 \Rightarrow x = v_0 t \qquad (3)$$

e, da equação (2), temos:

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = -gt \Rightarrow y = h - gt^2/2 \qquad (4)$$

Substituindo (3) e (4) na equação da trajetória, dada inicialmente, obtemos:

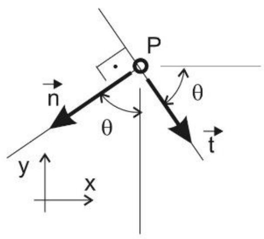
$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \Rightarrow h - \frac{gt^2}{2} = h\left[1 - \frac{(v_0 t)^2}{b^2}\right] \Rightarrow \boldsymbol{v_{0_{MAX}}^2} = \boldsymbol{\frac{b^2 g}{2h}}$$

c) Não há atrito, <u>a força normal N não realiza trabalho</u> (é sempre ortogonal à trajetória) e o único trabalho é aquele realizado pela força peso. Assim, pelo Teorema da Energia:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh \Rightarrow \boldsymbol{v^2 = v_0^2 + 2gh}$$

d) Expressão da velocidade do ponto P em função de θ

Temos, da equação da trajetória:



$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2hx}{b^2} \Rightarrow x = -\frac{b^2\tan\theta}{2h} \Rightarrow y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) =$$

$$= h\left[1 - \frac{\left(-\frac{b^2\tan\theta}{2h}\right)^2}{b^2}\right] = h\left[1 - \frac{b^2\tan^2\theta}{4h^2}\right] = h - \frac{b^2\tan^2\theta}{4h}$$

Teorema da Energia, usando a equação da trajetória:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h-y) = mg\left(h - h + \frac{b^2\tan^2\theta}{4h}\right) = mg\frac{b^2\tan^2\theta}{4h} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2g\frac{b^2\tan^2\theta}{4h}}$$

Assim:

$$\vec{v} = v\cos\theta\,\vec{\imath} - v\sin\theta\,\vec{\jmath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}} = \sqrt{\boldsymbol{v_0^2 + 2g\frac{b^2\tan^2\theta}{4h}}}\,(\boldsymbol{\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}})$$

Para os versores de Frenet:

$$\boldsymbol{\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}}$$

e:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath}) = \frac{1}{\rho}\vec{n} \Rightarrow \rho = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \Rightarrow \boldsymbol{\vec{n} = -\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath}}$$