

PSI3262 – FCEDA – Aula 17 – Transitório de circuitos de primeira ordem

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

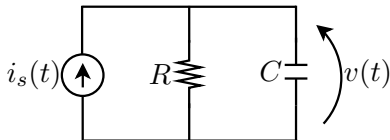
Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

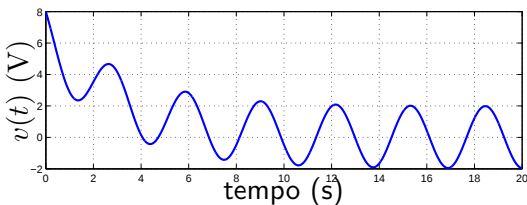
- ▶ analisar o transitório de circuitos de primeira ordem, excitados por um degrau ou por um sinal senoidal

Como analisar o transitório?

- ▶ Até agora, sabemos obter tensões e correntes dos circuitos em regime permanente. **O que acontece antes do regime?**
- ▶ Considere o circuito abaixo com $v(0) = 8 \text{ V}$, $C = 0,5 \text{ F}$, $R = 6 \text{ } \Omega$ e $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t)$, (V,s)



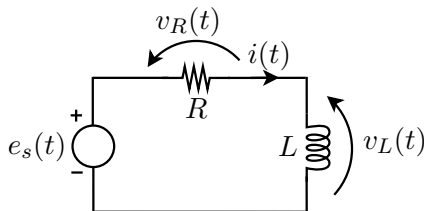
- ▶ A tensão do capacitor ao longo do tempo é dada por



- ▶ **Como obter uma expressão para $v(t)$, $t \geq 0$?** Como analisar o circuito antes do regime permanente senoidal se estabelecer?

Circuito RL

Considere o circuito RL



Escrevendo a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

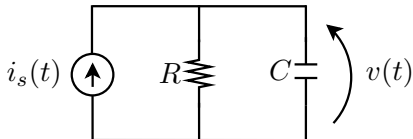
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t)$$

Dividindo essa equação por L , obtemos

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)$$

Circuito RC

Analogamente, considere o circuito RC



Escrevendo a primeira lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$i_C(t) + i_R(t) = i_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R} v(t) = i_s(t)$$

Dividindo essa equação por C , obtemos

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{C} i_s(t)}$$

Circuitos RL e RC

Os circuito RL e RC são descritos respectivamente pelas seguintes equações diferenciais

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t)$$

Essas equações diferenciais são classificadas como:

- ▶ **de primeira ordem**, pois aparece no máximo a primeira derivada da função incógnita
- ▶ **ordinária**, pois não há derivadas parciais (derivamos apenas com relação ao tempo, que é a única variável independente)
- ▶ **linear**, pois não há funções não lineares da incógnita e/ou de suas derivadas
- ▶ **a coeficientes constantes**, pois consideramos que o resistor e o indutor não variam no tempo

Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

Considere a equação diferencial do tipo

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

em que

- ▶ $x(t_0) = x_0$ é a condição inicial
- ▶ $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- ▶ $x(t)$ é a função incógnita
- ▶ τ é uma constante real diferente de zero
- ▶ $f(t)$ é uma função dada

Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

A solução geral da equação

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

para $t \geq t_0$ é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

em que

- ▶ $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

- ▶ $x_p(t)$ é uma solução particular da equação completa.

A seguir, vamos obter $x_h(t)$ e $x_p(t)$.

Solução da equação homogênea

Vamos primeiramente resolver a equação homogênea

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

Que função não nula tem derivada proporcional a ela própria?

Uma possível candidata é a função **exponencial**:

$$x_h(t) = Ae^{p(t-t_0)}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}_h(t) = Ape^{p(t-t_0)}$$

em que A e p são constantes.

Substituindo na equação homogênea, chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0} \left(p + \frac{1}{\tau} \right) = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\tau},$$

o que leva a

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

A constante A será determinada posteriormente.

Constante de tempo

- ▶ A constante τ que aparece dividindo $x(t)$ na equação completa aparece na solução da equação homogênea dividindo $-(t - t_0)$ no argumento da exponencial
- ▶ Para $\tau > 0$, quanto maior o valor de τ , mais lentamente a solução da equação homogênea $x_h(t)$ se aproxima de zero
- ▶ Por análise dimensional, τ deve ter unidade de tempo e por isso é chamada de **constante de tempo**
- ▶ A constante de tempo do circuito RL vale

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- ▶ A constante de tempo do circuito RC vale

$$\tau = RC$$

Solução particular da equação completa

A solução da equação completa é dada agora por

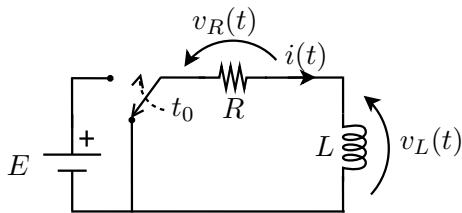
$$x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t)$$

Calculando o limite para $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}_{=0} + \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

uma solução particular da equação completa é dada pela resposta permanente de $x(t)$, ou seja, a expressão de $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Considere $i(t_0) = i_0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, em que

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

representa a função degrau unitário.

► O que acontece em regime?

Estamos excitando o circuito com uma tensão constante E a partir de $t = t_0$. Para $t \rightarrow \infty$, o **indutor se comportará como um curto**, o que leva a

$$i(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{E}{R} = i_p(t)$$

que é a **solução particular da equação completa**

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- ▶ A solução da equação completa é

$$\begin{aligned}i(t) &= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + i_p(t) \\&= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}\end{aligned}$$

- ▶ Precisamos apenas descobrir o valor da constante A . Para isso, vamos impor a condição inicial, ou seja,

$$i(t_0) = i_0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = i_0 - \frac{E}{R}$$

- ▶ A solução fica

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0$$

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- ▶ Se $e_s(t) = 0$, dizemos que o circuito está **livre** e a resposta se reduz a

$$i_{\text{livre}}(t) = i_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}, \quad t \geq t_0,$$

que é chamada de **resposta livre** e ocorre devido apenas às condições iniciais.

- ▶ Se $i_0 = 0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, a resposta se reduz a

$$i_{\text{forçada}}(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} \right), \quad t \geq t_0.$$

que é chamada de **resposta forçada** e ocorre devido apenas à função de excitação.

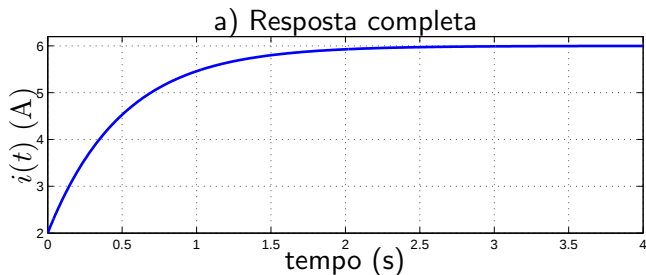
- ▶ Usando o princípio da superposição, podemos verificar que

$$i(t) = i_{\text{transitória}}(t) + i_{\text{permanente}}(t)$$

e

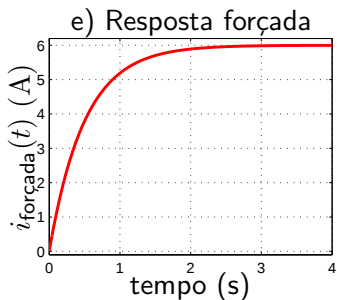
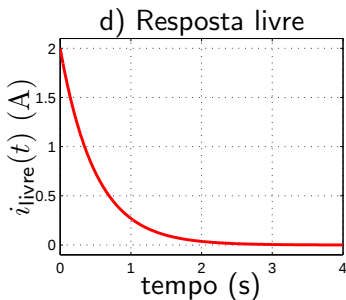
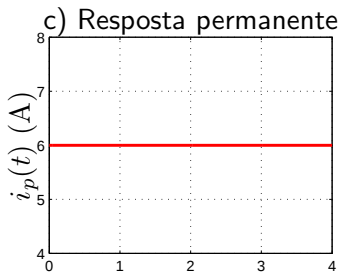
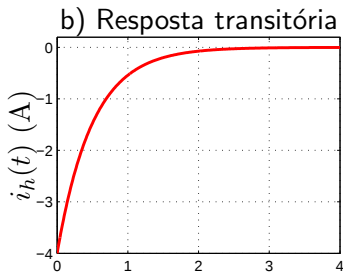
$$i(t) = i_{\text{livre}}(t) + i_{\text{forçada}}(t).$$

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Resposta completa do circuito RL, considerando $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2$ Ω , $e_s(t) = 12H(t)$, (V,s).

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



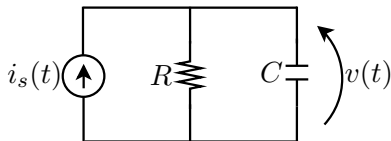
$$t_0 = 0, i_0 = 2 \text{ A}, L = 1 \text{ H}, R = 2 \Omega, e_s(t) = 12H(t), (\text{V}, \text{s})$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

Considere

- ▶ $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ) H(t)$, (A,s)
- ▶ condição inicial $v(0) = 8$ V
- ▶ $C = 0,5$ F
- ▶ $R = 6 \Omega$

no circuito



Precisamos resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{3}v(t) = 4 \cos(2t + 125,54^\circ)$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- ▶ Como a excitação é senoidal e o circuito é linear, sabemos que em RPS, a tensão do capacitor também será senoidal com $\omega = 2 \text{ rad/s}$
- ▶ Para obter $v_p(t)$, podemos usar fasores. A impedância desse circuito é dada por

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow Z(j2) = \frac{6}{1 + j6} = 0,1622 - j0,9730 = 0,9864e^{-j80,54^\circ} \Omega$$

- ▶ O fasor da tensão do capacitor vale

$$\hat{V}_p = Z(j2) \cdot \hat{I}_s = 0,9864e^{-j80,54^\circ} \cdot 2e^{j125,54^\circ} = 1,9728e^{j45^\circ} \text{ V}$$

- ▶ Consequentemente, a expressão de sua resposta permanente é

$$v_p(t) = 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), (\text{V}, \text{s})$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- ▶ Lembrando que a constante de tempo do circuito RC vale $\tau = RC = 3$ s, podemos obter a solução completa dada por

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), \quad t \geq 0$$

- ▶ Ainda precisamos descobrir o valor de A e para isso, vamos impor a condição inicial $v(0) = 8$ V:

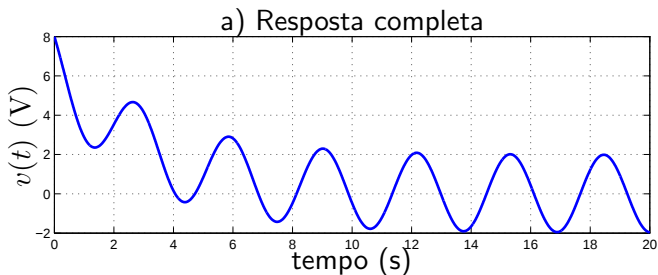
$$v(0) = 8 = A + 1,9728 \cos(2 \cdot 0 + 45^\circ)$$

$$\Rightarrow A = 8 - 1,9728 \cos(45^\circ) = 6,6050 \text{ V}$$

- ▶ Assim, a expressão da tensão do capacitor para $t \geq 0$ vale

$$v(t) = 6,6050 e^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), \quad (\text{V}, \text{ s})$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



Resposta completa do circuito RC, considerando $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V,
 $C = 0,5$ F, $R = 6$ Ω , $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t)$, (V,s)

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

A expressão da resposta completa é composta de dois termos: resposta transitória e resposta permanente.

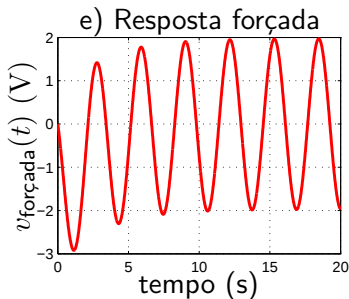
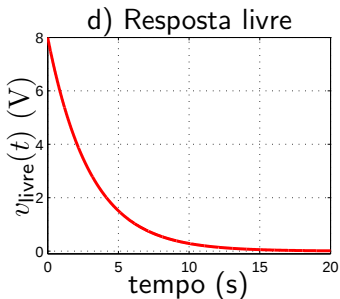
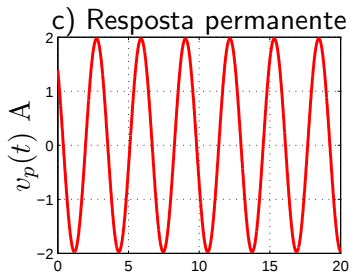
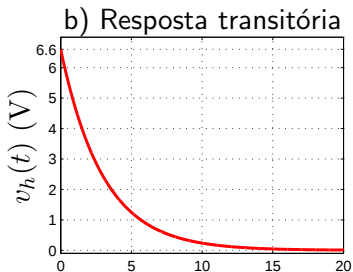
A resposta livre será dada por

$$v_{\text{livre}}(t) = v_0 e^{-t/\tau} = 8 e^{-t/3}.$$

e a resposta forçada por

$$v_{\text{forçada}}(t) = v(t) - v_{\text{livre}}(t) = \underbrace{-1,3950}_{=6,6050-8} e^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ).$$

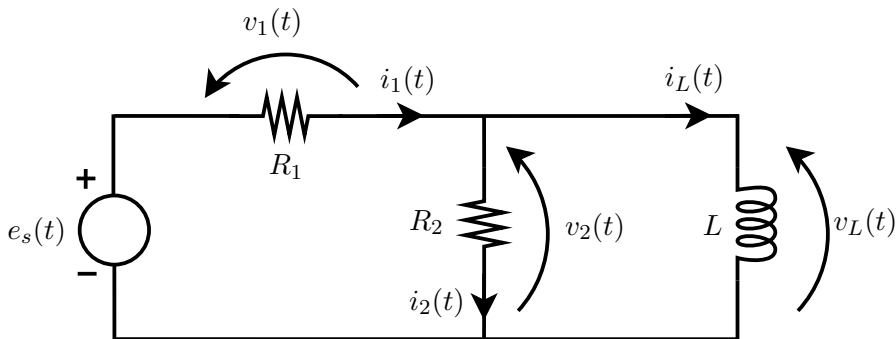
Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



$$t_0 = 0, v_0 = 8 \text{ V}, C = 0,5 \text{ F}, R = 6 \text{ } \Omega, i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t), (\text{V}, \text{s})$$

Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 3

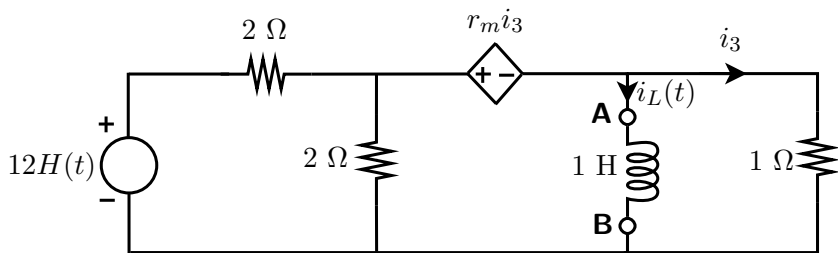
Considere o circuito abaixo com $i_L(0) = -2$ A,
 $e_s(t) = 10H(t)$, (V,s), $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$ e $L = 2,5$ H.



Determine a expressão de $i_L(t)$ para $t \geq 0$

Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 4

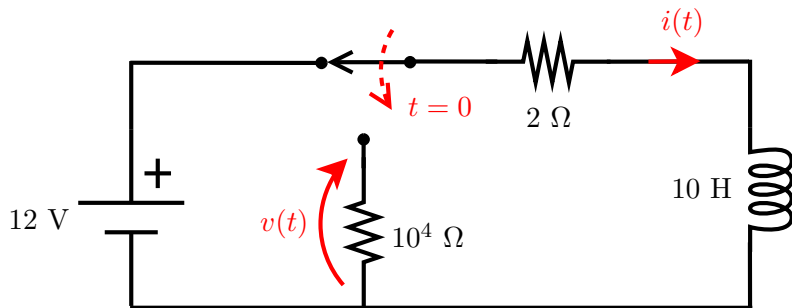
Considere o circuito abaixo com $r_m = 1\ \Omega$ e $i_L(0) = 8\text{ A}$



Determine a expressão de $i_L(t)$ para $t \geq 0$

Aplicações de circuitos de 1ª ordem

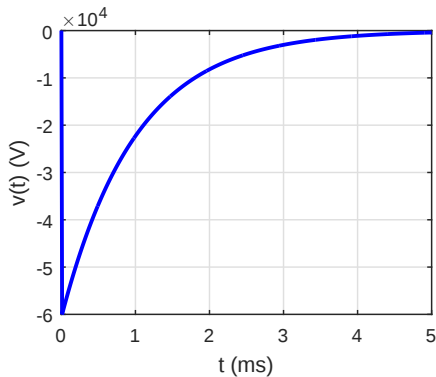
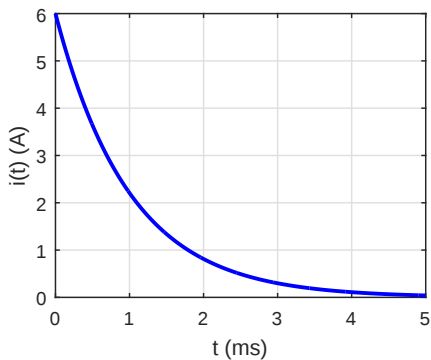
- ▶ Descarga de uma bobina
- ▶ chave do tipo *make-before-break*



- ▶ $i(0) = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}$
- ▶ $\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} \approx 10^{-3} \text{ s}$
- ▶ $i(t) = 6e^{-1000t}, t > 0$
- ▶ $v(t) = -60000e^{-1000t}$

Aplicações de circuitos de 1ª ordem

► Descarga de uma bobina

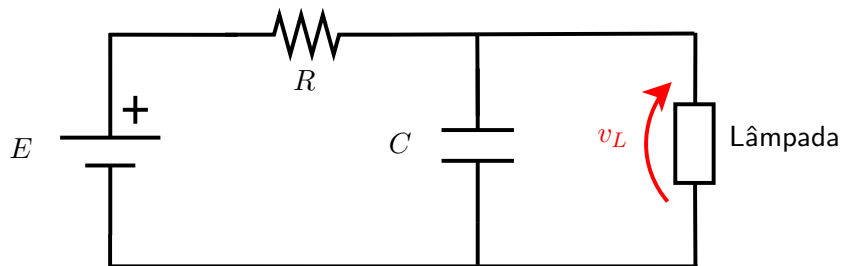


Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- ▶ Descarga de uma bobina
- ▶ aplicada à vela do automóvel (sistema de ignição)
- ▶ a faísca provoca a explosão da mistura ar/gasolina
- ▶ dá a partida no automóvel (motor de combustão interna)
- ▶ a alta tensão rompe a rigidez dielétrica do ar que se torna condutor

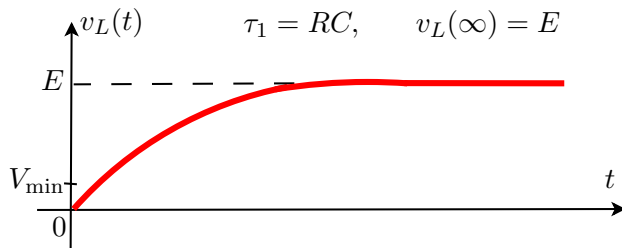
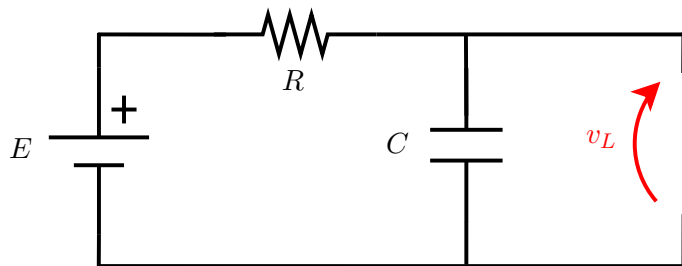
Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- ▶ Lâmpada intermitente

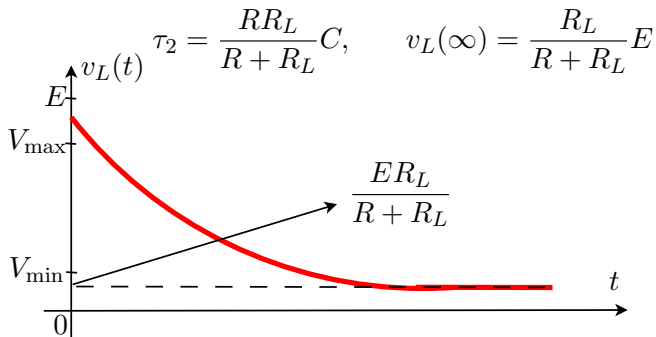
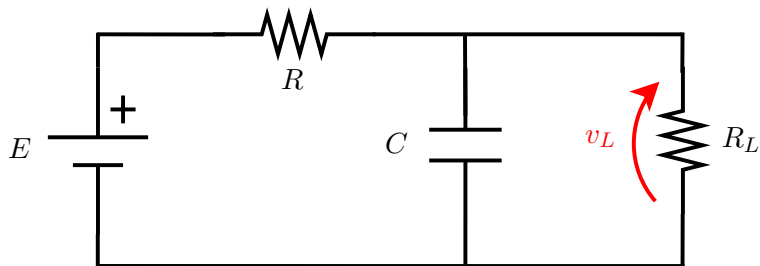


- ▶ $R \gg R_{\text{Lâmpada}} = R_L$
- ▶ $E \gg V_{\text{max}}$ e $ER_L/(R + R_L) \ll E$
- ▶ Lâmpada conduz para $v_L > V_{\text{max}}$ e para de conduzir (aberto) para $v_L < V_{\text{min}}$

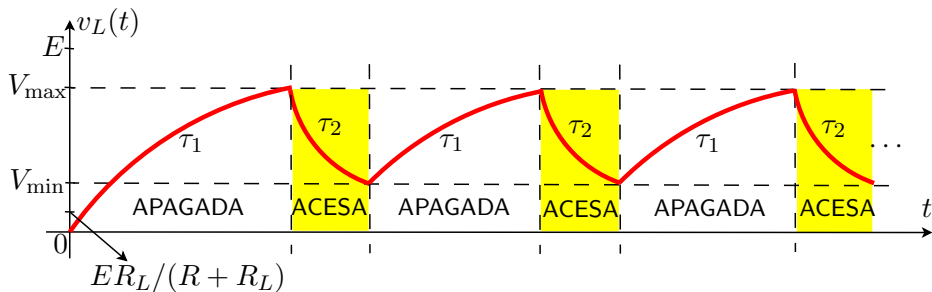
Lâmpada apagada



Lâmpada acesa



Lâmpada intermitente



$$\tau_1 = RC \gg \tau_2 = \frac{RR_L}{R + R_L}C$$