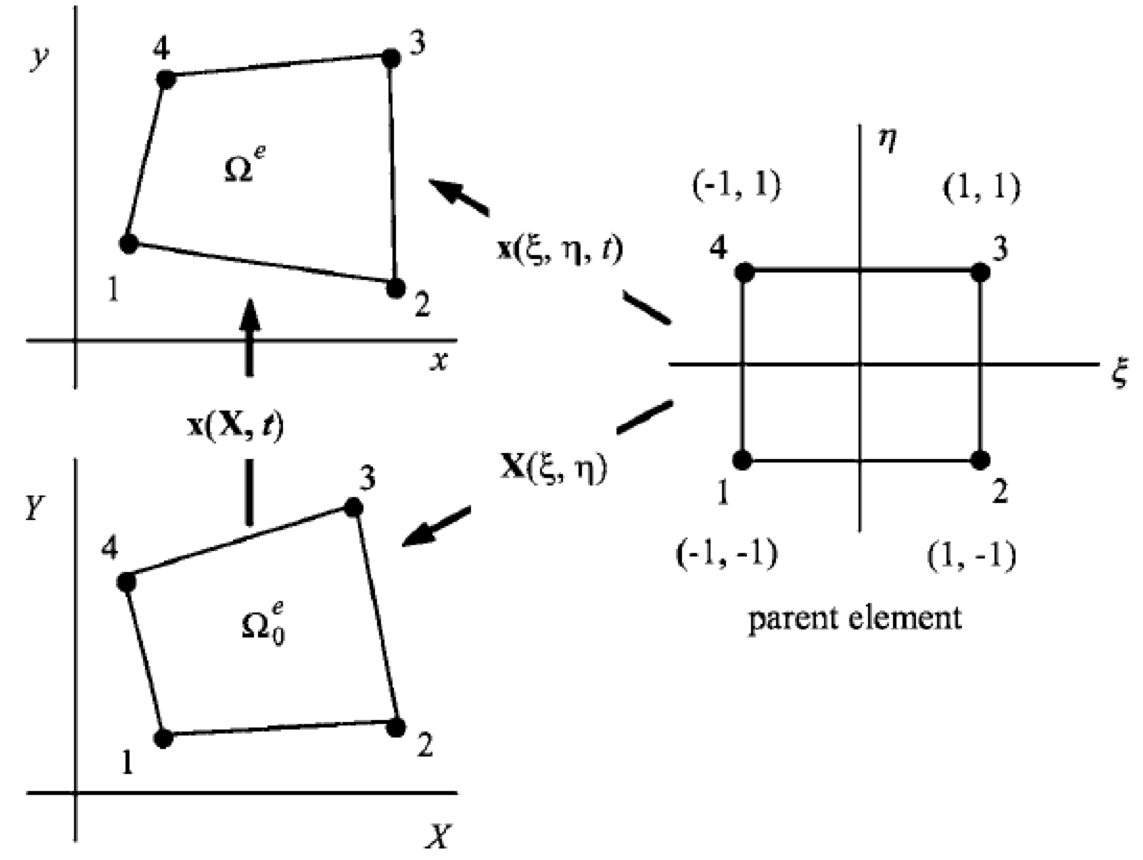
Elementos finitos Isoparamétricos

Noções básicas

- $u=N_i u_i$ aproximação para os deslocamentos;
- $x=N_i x_i$ aproximação para a geometria do elemento;
- N_i são as conhecidas funções de forma;

$$N_I(\xi)=N_I(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta), \qquad I=1,4$$



Noções básicas

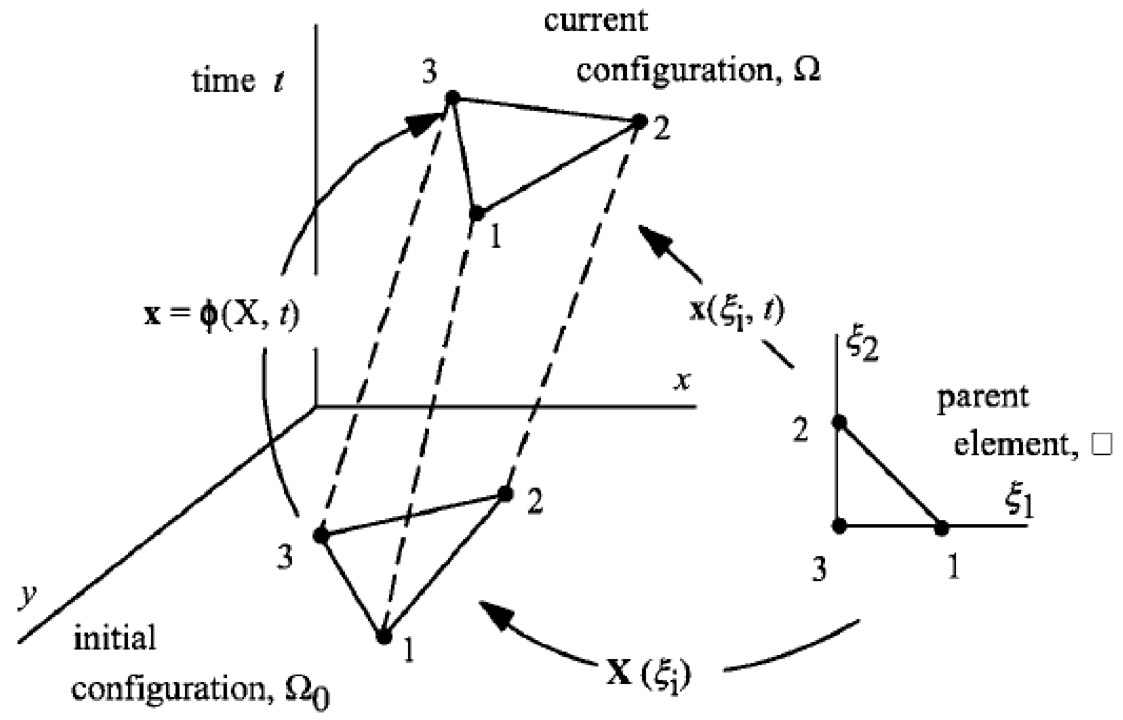
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{X}), t) \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^e, t) \circ \boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{X})$$

$$\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^e).$$

$$u_i(\boldsymbol{\xi}, t) = u_{iI}(t) N_I(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{u}_I(t) N_I(\boldsymbol{\xi})$$

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}, t) = v_i(\boldsymbol{\xi}, t) = v_{iI}(t) N_I(\boldsymbol{\xi}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{v}_I(t) N_I(\boldsymbol{\xi})$$

$$\dot{v}_i(\boldsymbol{\xi}, t) = \dot{v}_{iI}(t) N_I(\boldsymbol{\xi}), \quad \dot{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \dot{\mathbf{v}}_I(t) N_I(\boldsymbol{\xi})$$



Noções básicas - Derivadas das funções

A derivada espacial do campo de velocidades é obtida através da diferenciação implícita (regra da cadeia)

$$\mathbf{L} = \mathbf{v}_{,\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{,\boldsymbol{\xi}}\, \mathbf{x}_{,\boldsymbol{\xi}}^{-1} = \mathbf{v}_{,\boldsymbol{\xi}}\, \mathbf{F}_{\xi}^{-1}$$

$$\mathbf{v}_{,\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{v}_{,\mathbf{x}}\, \mathbf{x}_{,\boldsymbol{\xi}}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k}\left(F_{kj}^{\xi}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_k}\right)\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}$$

$$\mathbf{x}_{,\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, t) \equiv \mathbf{F}_{\xi}(\boldsymbol{\xi}, t) = \begin{bmatrix} x_{,\xi_1} & x_{,\xi_2} \\ y_{,\xi_1} & y_{,\xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$$

$$N_{I,\mathbf{x}}^{T} = N_{I,\boldsymbol{\xi}}^{T}\, \mathbf{x}_{,\boldsymbol{\xi}}^{-1} = N_{I,\boldsymbol{\xi}}^{T}\, \mathbf{F}_{\xi}^{-1}$$

$$L_{ij} = v_{iI}\frac{\partial N_I}{\partial \xi_k}\left(F_{kj}^{\xi}\right)^{-1} \qquad \mathbf{L} = \mathbf{v}_I N_{I,\boldsymbol{\xi}}^{T}\, \mathbf{x}_{,\boldsymbol{\xi}}^{-1}$$

Integração no domínio de referência (natural, do elemento, etc)

$$\int_{\Omega^e} g(\mathbf{x})\,d\Omega = \int_{\Omega_0^e} g(\mathbf{x}(\mathbf{X}))J\,d\Omega_0 = \int_{\square} g(\boldsymbol{\xi})J_\xi\,d\square$$

Descrição Euleriana (espacial) - Na verdade essa é uma aplicação para Lagrangeano atualizado

$$\int_{\Omega_0^e} g(\mathbf{X})\,d\Omega_0 = \int_{\square} g(\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) J_\xi^0\,d\square$$

Descrição Lagrangeana (material)

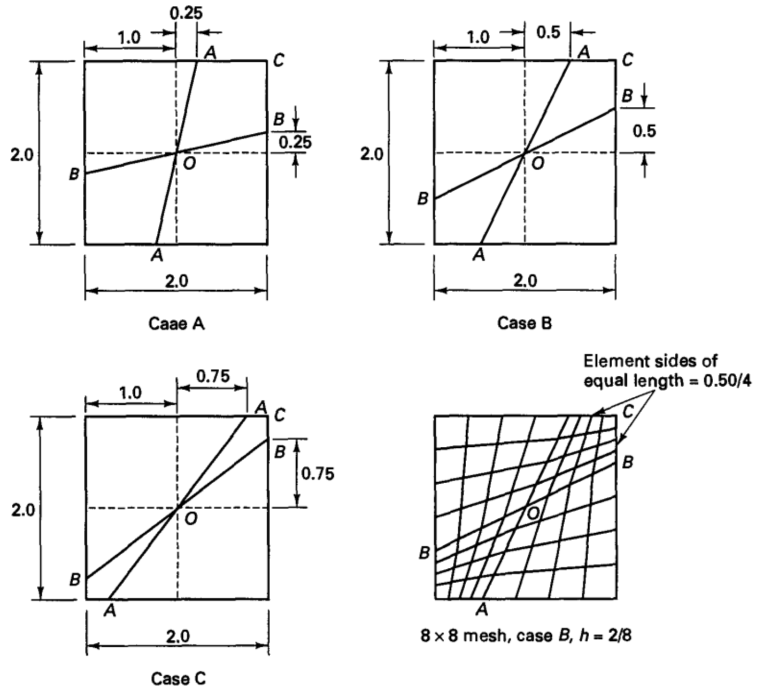
Por exemplo, a força interna do elemento fica:

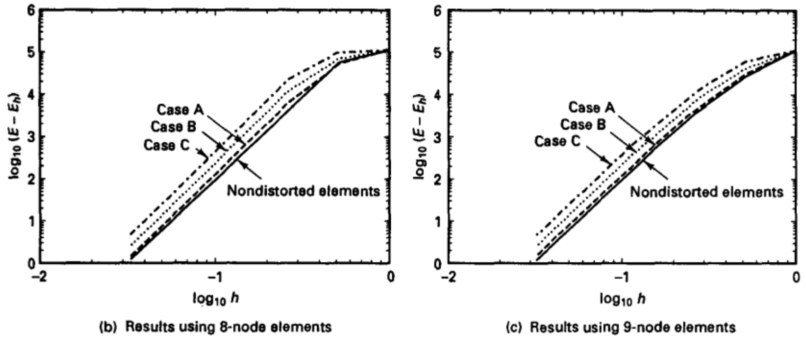
$$f_{iI}^{\text{int}} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j}\sigma_{ji}\,d\Omega = \int_{\square} \frac{\partial N_I}{\partial x_j}\sigma_{ji} J_\xi\,d\square$$

OBS: $J_\xi \equiv \det(\mathbf{x}_{,\xi}) > 0$

Convergência

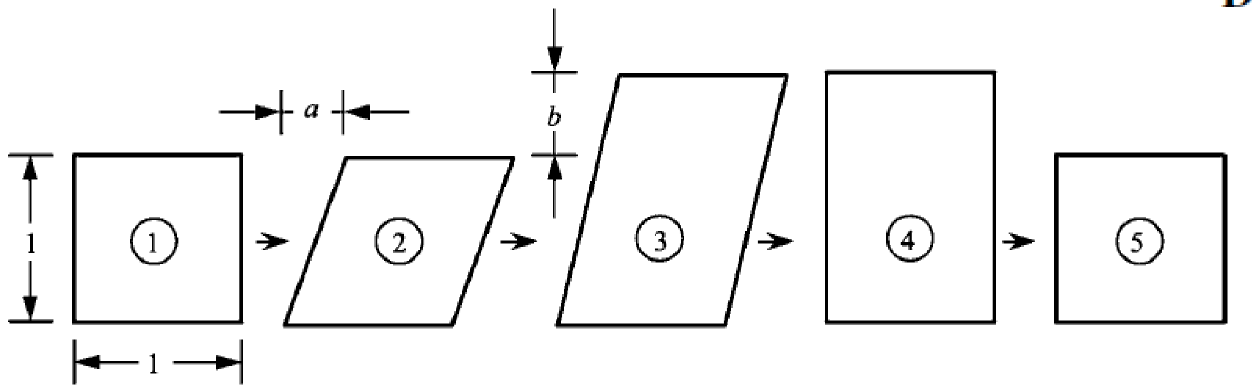
Two-dimensionel elements (plene stress, plane strain and axisymmetric conditions)	Integration order
4-node	2 × 2
4-node distorted	2 × 2
8-node	3 × 3
8-node distorted	3 × 3
9-node	3 × 3
9-node distorted	3 × 3
16-node	4 × 4
16-node distorted	4 × 4





Exercício

- Um elemento passa por uma mudança de configuração em 5 estágios. A mudança de configuração entre cada estágio é linear no tempo. Determine o tensor da taxa de deformação D, o tensor de deformação de Lagrange (Green) e a integral da taxa de deformação.



$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}):$$

Exercício

- Deduza as fórmulas para o tensor de mudança de configuração e o tensor de taxa de deformação (D) para o elemento de 4 nós da figura abaixo: