INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Definição: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = (b-a)/n$ e seja x_j um número pertencente ao j-ésimo intervalo, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right]\Delta x$, se este limite existir.

Pode-se mostrar que se a função $y = f(x)$ é contínua em um intervalo $[a,b]$, então ela é integrável em $[a,b]$.

1- f é definida num intervalo fechado [a, b]
2- f é contínua em [a, b]

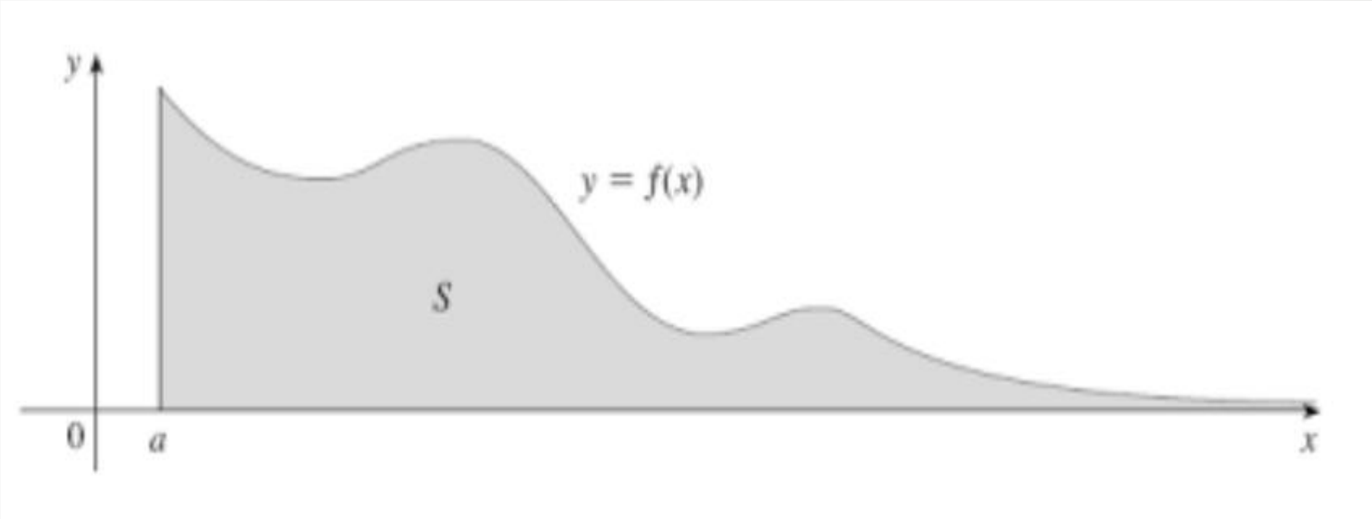
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

A partir de agora estudaremos integrais com o conceito de definidas para os casos:

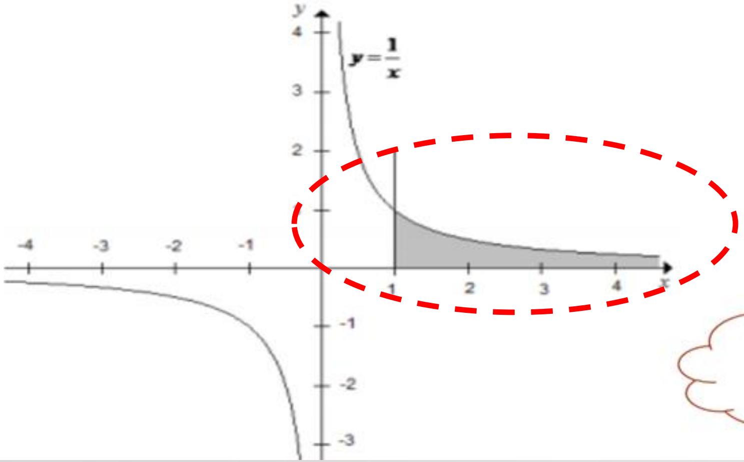
1) **intervalo infinito;**

2) **f tem descontinuidade em [a, b].**

Pergunta: É possível pintar um muro de área infinita com o conteúdo de uma lata de tinta de volume finito?



Antes de responder a esta pergunta, considere o seguinte problema: Calcular a área da superfície situada abaixo da curva que representa o gráfico da função de regra $y = f(x) = \frac{1}{x}$, acima do eixo das abscissas e à direita da reta $x = 1$, isto é, calcule a área da região hachurada da figura que segue (perceba que esta região se estende infinitamente à medida que os valores de x crescem).



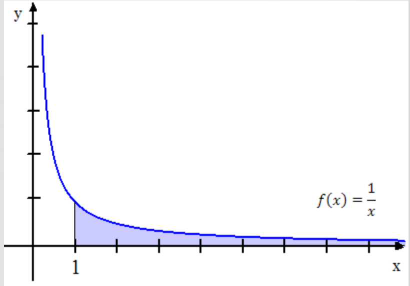
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

DEFINIÇÃO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 1

(a) $\int_a^t f(x)dx$ existe para cada número t $\geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

desde que o limita exista e seja finito.



(b) Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para cada número t $\leq$ b, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

desde que o limita exista e seja finito.

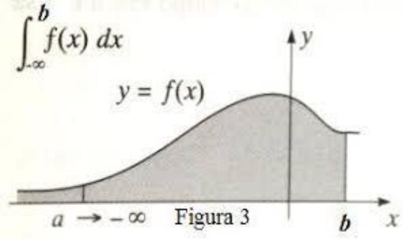


Figura 3

DEFINIÇÃO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 1

(c) Se $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ e $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ são convergentes e c for um número real qualquer então:

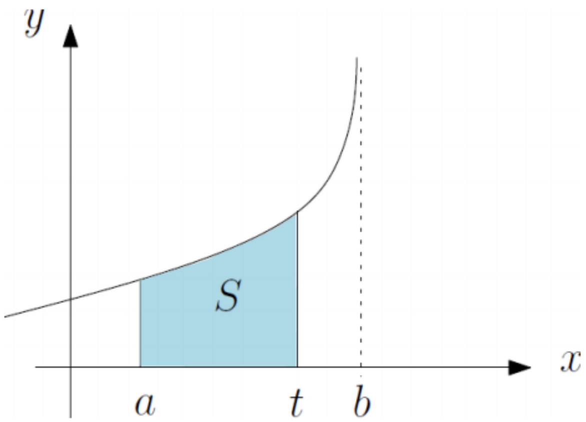
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

OBS:

As integrais impróprias são chamadas convergentes se os limites existem e são finitos. Caso contrário, são chamadas divergentes.

DEFINIÇÃO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 2 – INTEGRANDO DESCONTÍNUOS

Suponha que f seja uma função contínua definida em $[a, b)$, mas descontínua em b.



Qual a área da região S?

O que acontece quando $t \to b^-$?

DEFINIÇÃO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 2 – INTEGRANDO DESCONTÍNUOS

(a) *Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então*

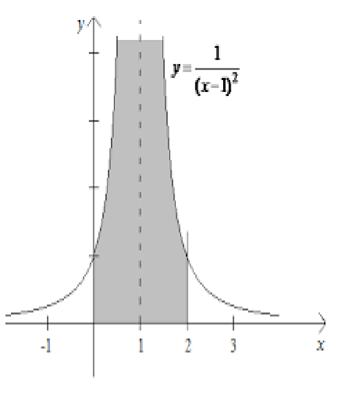
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

desde que o limita exista e seja finito.

(b) *Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

desde que o limita exista e seja finito.



DEFINIÇÃO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 2 – INTEGRANDO DESCONTÍNUOS

c) Se f tiver descontinuidade em c, onde a < c < b, e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ são convergentes então,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

OBS:

As integrais impróprias são chamadas convergentes se os limites existem e são finitos. Caso contrário, são chamadas divergentes.