ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Dinâmica do Ponto – Parte 1

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

DINÂMICA DO PONTO

Supõe-se um referencial fixo.

RECORDAÇÃO

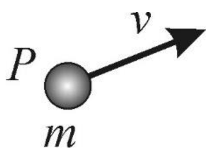
Da Mecânica Newtoniana temos os seguintes princípios:

- 1º Princípio (Lei da inércia):

"Todo ponto material isolado, no espaço e tempo absolutos, permanece num estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme."

O termo "isolado" significa aqui "na ausência de forças externas". Note-se a equivalência, para esta lei, entre o repouso e o movimento retilíneo uniforme.

Para um ponto material P de massa m e velocidade $\vec{v}$, podemos definir o vetor quantidade de movimento Q desse ponto:



$$\vec{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$$

O princípio acima é equivalente ao de que, na ausência de forças externas, $\vec{Q}$ é constante no tempo (lei da conservação da quantidade de movimento).

- 2º Princípio (Lei fundamental):

"A variação da quantidade de movimento é proporcional à força que age num ponto material, no espaço e tempo absolutos, e se dá na mesma direção e sentido daquela força."

Ou seja:

$$\dot{\vec{\boldsymbol{Q}}} = \vec{\boldsymbol{F}}$$

com $\vec{F}$ sendo o vetor de força aplicado ao ponto considerado.

De $\vec{Q} = m\vec{v}$ obtemos:

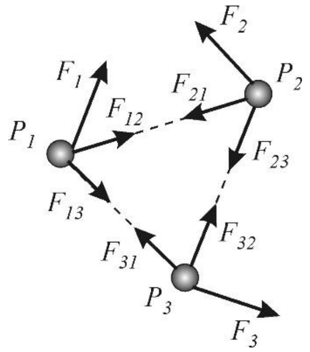
$$\dot{\vec{Q}} = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}}$$

Com massa constante (definição de ponto material), temos:

$$\dot{\vec{Q}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

<u>- 3º Princípio (Lei da ação e reação):</u>

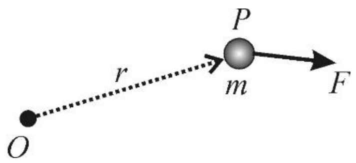
"As forças que dois pontos materiais exercem entre si são sempre diretamente opostas".



$$\left\| \begin{array}{l} F_{12} = F_{21} \\ F_{13} = F_{31} \\ F_{23} = F_{32} \end{array} \right.$$

<u>Definições da Dinâmica do Ponto</u>

Seja um ponto material *P* de massa *m* e chamemos de $\vec{r} = P - O$ o seu vetor posição, em relação a uma origem *O*, num instante genérico. Seja $\vec{F}$ a força que age em *P* nesse instante.



Define-se:

a) *<u>Quantidade de movimento</u>* de *P* no instante *t*:

$$\vec{Q} = m\dot{\vec{r}} = m\vec{v}$$

b) *<u>Energia cinética</u>* de *P* no instante *t*:

$$T(t) = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

c) *<u>Trabalho</u>* da força $\vec{F}$ entre os pontos P_1 e P_2 da trajetória de *P*, correspondentes aos instantes t_1 e t_2:

$$\tau(t_1, t_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot dP = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{dP}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

d) *<u>Quantidade de movimento angular</u>* de *P*, no instante *t*, em relação ao polo *O*:

$$\vec{H}_O(t) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (P - O) \wedge m\vec{v}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{\vec{H}}_O(t) = (\vec{v} - \vec{v}_O) \wedge m\vec{v} + (P - O) \wedge m\vec{a}_P = m\vec{v} \wedge \vec{v}_O + (P - O) \wedge \vec{F} =$$

$$= m\vec{v} \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\dot{\vec{H}}_O(t) = m\vec{v} \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O}$$

que é o "*Teorema da quantidade de movimento angular*" para um ponto material.

Se o ponto O for fixo, a expressão deste teorema se reduz a:

$$\boldsymbol{\dot{\vec{H}}_O(t) = \vec{M}_O}$$

e) *Teorema da energia cinética*

Energia cinética:

$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt}T(t) = m\vec{v}\cdot\vec{a} = m\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Integrando:

$$T(t_2) - T(t_1) = \Delta T = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_1})$$

que é a expressão do Teorema da energia cinética: "*A variação da energia cinética de um ponto material é igual ao trabalho realizado pela força aplicada nele, entre dois instantes considerados*".

f) *Integral da energia*

Se a força $\vec{F}$ que age em *P* depender apenas da posição deste, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, e se existir uma função escalar $U(\vec{r})$ cuja diferencial seja:

$$dU(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{v}dt$$

diremos que $\vec{F}$ deriva de um potencial.

A função $U(\vec{r})$ chama-se *função de força*, e a função $V(\vec{r}) = -U(\vec{r})$ chama-se *energia potencial* associada ao campo de forças $\vec{F}(\vec{r})$.

O trabalho ao longo de uma trajetória:

$$\tau(P_0, P) = \int_{P_0}^{P} dU(\vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r})$$

depende apenas das posições inicial e final do ponto.

Neste caso, o teorema da energia cinética pode ser escrito como:

$$T + V = T_0 + V_0 = \text{constante}$$

Esta última relação chama-se "*Integral da energia*", pois permite a determinação da velocidade escalar em função das condições iniciais, sem efetuar formalmente qualquer integração (se $V(\vec{r})$ for conhecida, é claro); decorre:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}[V(\vec{r}_0) - V(\vec{r})]$$

g) *Potência* da força F, no instante t:

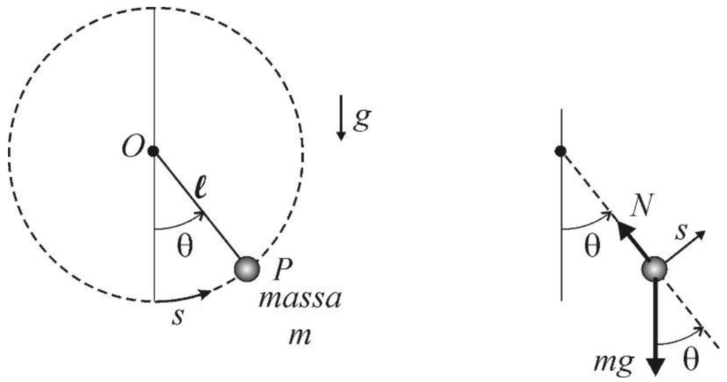
$$W(t) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Ponto vinculado e ponto livre

Ponto livre – não há restrição ao movimento – a trajetória é incógnita. Exemplos: queda livre, balística.

Ponto vinculado: há restrições ao movimento; a trajetória é dada, em geral.

<u>Exemplo 1:</u> (ponto vinculado) - Pêndulo simples



Lei fundamental: $m\vec{a} = \vec{F}$

Componentes na direção tangente à trajetória de P:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{s} = -g\sin\theta$$

Com $s = l\theta$, vem: $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$

Com θ em radianos, se $\sin\theta \approx \theta$ (PEQUENAS OSCILAÇÕES), obtemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right)$$

com período $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (não depende da amplitude).

Para θ qualquer, integrando a equação acima:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta + \lambda)$$

com $\lambda = \frac{E}{mgl}$ e E = energia total do sistema, considerando como referência para a energia potencial (energia potencial nula) a posição $\theta = \pm 90°$ (nível do diâmetro horizontal).

Os movimentos possíveis dependem de λ. Há três casos a considerar ($\lambda < -1$ não é possível, e $\lambda = -1$ só permite o equilíbrio em $\theta = 0$):

a) $-1 < \lambda < 1$

b) $\lambda = 1$

c) $\lambda > 1$

<u>a) $-1 < \lambda < 1$:</u> existe um ângulo α tal que $\cos\alpha = -\lambda$ e $0 < \alpha < \pi$; assim:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) \geq 0$$

e o movimento é oscilatório periódico entre $-\alpha$ e α, com período:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k)$$

com $K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$

$$p!! = p(p-2)(p-4)\cdots\begin{cases}\text{até } 1, \text{se } p \text{ for ímpar}\\ \text{até } 2, \text{se } p \text{ for par}\end{cases}$$

e $k = \sin\frac{\alpha}{2}$

O período depende da amplitude; o pêndulo <u>não é isócrono</u>.

Para $\alpha = 30°$, por exemplo, o erro ao se usar $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}$ é da ordem de 2%.

<u>b) $\lambda = 1$</u>:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(1+\cos\theta) = \frac{4g}{l}\cos^2\frac{\theta}{2} \geq 0$$

e se anula para $\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$

Integrando:

$$\tan\frac{\theta}{4} = \frac{-1+e^{\sqrt{l/g}t}}{1+e^{\sqrt{l/g}t}}, \text{ supondo } \theta = 0 \text{ em } t = 0$$

O movimento é duplamente assintótico, para $\theta = \pm\pi$

<u>c) $\lambda > 1$</u>

$\dot{\theta}^2$ nunca se anula; o movimento é circular, sempre no mesmo sentido.

Tempo para uma volta completa:

$$T = 2kK(k)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

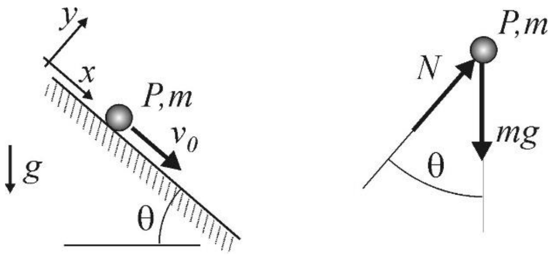
com $K(k)$ já definido anteriormente e usando, neste caso:

$$k = \frac{2}{1+\lambda} \ (< 1)$$

OBS.: Para se obter um pêndulo isócrono, é preciso considerar o movimento de P sobre uma cicloide.

Exemplo 2: (ponto vinculado) - Plano inclinado (sem atrito)

Determine a reação normal do plano e equação horária do movimento.



Lei fundamental:

$$-mg\cos\theta\,\vec{j} + mg\sin\theta\,\vec{i} + N\vec{j} = m\vec{a} = m\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right)$$

Condição do ponto percorrendo o plano inclinado:

$$y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = a_y = 0$$

Da lei fundamental:

$$\boldsymbol{N = mg\cos\theta}$$

e

$$a_x = g\sin\theta \text{ (constante)}$$

Portanto:

$$v_x = \dot{x} = v_0 + g\sin\theta\, t \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2$$