Computação III - $2^{\underline{o}}$ Semestre de 2021

Lista 1

Exercício 1 Considere os sistemas lineares abaixo representados pelas respectivas matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Usando o método de eliminação de Gauss, estude a existência e unicidade de soluções para estes sistemas.

Exercício 2 Calcule a decomposição LU de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e verifique que $A = LU$.

Exercício 3 Usando o método de eliminação de Gauss com trocas de linhas, calcule uma decomposição $P^T LU$ de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{bmatrix}$$

e verifique que $PA = LU$.

Exercício 4 A decomposição $PA = LU$ de uma matriz 3×3 é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; \text{e} \; U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Usando a decomposição acima, resolva o sistema linear $Ax = b$, onde $b = [\ 1 \quad 2 \quad -1\ ]^T$.

b) Obtenha a matriz A.

Exercício 5 Suponha que A é uma matriz simétrica definida positiva.

a) Prove que as submatrizes principais $A(j : k, j : k)$, onde $j \leq k$, são simétricas definidas positivas. Conclua que é possível obter a decomposição LU de A sem trocas de linhas.

b) Considere a decomposição LU de A. Prove que $U = DL^T$, onde D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são positivos (fatoração LDL^T).

c) Prove que existe uma única matriz triangular inferior $\tilde{L}$ com elementos diagonais positivos tal que $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ (fatoração de Cholesky).

Exercício 6 Obtenha algoritmos para as fatorações de Cholesky e LDL^T de uma matriz simétrica definida positiva. Compare o número de operações aritméticas com a fatoração LU.

Exercício 7 Considere o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}$$

cuja matriz é simétrica definida positiva.

a) Obtenha a fatoração de Cholesky da matriz e resolva o sistema linear por substituições progressiva e regressiva.

b) Obtenha a fatoração LDL^T da matriz e resolva o sistema linear por substituições progressiva e regressiva.

Exercício 8 Usando a decomposição LDL^T, determine para que valores de α a matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$$

é definida positiva.

Exercício 9 Dizemos que uma matriz A tem estrutura de banda, com banda inferior b_L e banda superior b_U, se $a_{ij} = 0$ quando $i - j > b_L$ ou $j - i > b_U$. Suponha que A é uma matriz de banda com bandas inferior b_L e superior b_U, e que a decomposição LU de A pode ser feita sem trocas de linhas. Mostre que L tem banda inferior b_L e U tem banda superior b_U.

Exercício 10 Uma matriz tridiagonal é uma matriz de banda com $b_L = b_U = 1$. Se $M_{n\times n}$ é tridiagonal, ela pode ser armazenada usando-se três vetores a, b e c da seguinte forma: $M_{i,i-1} = a_i$, $2 \le i \le n$, $M_{ii} = b_i$, $1 \le i \le n$, e $M_{i,i+1} = c_i$, $1 \le i \le n-1$.

a) Deduza as fórmulas para a decomposição LU de M em termos dos vetores a, b e c.

b) Usando a decomposição acima, mostre como resolver um sistema linear $Mx = d$.

c) Calcule o número de operações aritméticas para se obter a decomposição LU de M, e para se resolver o sistema linear.

Exercício 11 Suponha que $A_{n\times n}$ é uma matriz de banda com bandas b_L e b_U, e que a decomposição LU de A possa ser feita sem trocas de linhas. Se b_L e b_U forem pequenos comparados com n, mostre que o número de operações aritméticas para se obter a decomposição LU é da ordem de $2n \cdot b_L \cdot b_U$, e que o número total de operações aritméticas para se resolver $Ax = b$ é da ordem de $2n \cdot (b_L \cdot b_U + b_L + b_U)$.

Exercício 12 Sejam $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ uma matriz diagonal $n \times n$ e A uma matriz $n \times n$. Prove que $(DA)_{ij} = d_i\, a_{ij}$ e $(AD)_{ij} = d_j\, a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exercício 13 Demosnstre os seguintes resultados:

a) Se U e V são matrizes triangulares superiores quadradas, então UV é uma matriz triangular superior.

b) Se U é uma matriz triangular superior quadrada, então o determinante de U é o produto dos elementos da sua diagonal (portanto U é inversível se e somente se os elementos da sua diagonal são diferentes de zero).

c) Se U é uma matriz triangular superior quadrada inversível, então U^{-1} é uma matriz triangular superior e $(U^{-1})_{ii} = 1/u_{ii}$, $1 \leq i \leq n$ (portanto, se U é uma matriz triangular superior quadrada, cujos elementos diagonais são iguais a 1, então U^{-1} é triangular superior com 1 na diagonal).

d) Se U e V são matrizes triangulares superiores quadradas, com elementos diagonais iguais a 1, então UV é triangular superior com 1 na diagonal.

d) Enuncie e demonstre resultados análogos para matrizes triangulares inferiores.

Exercício 14 Suponha que A é uma matriz inversível e diagonal dominante. Prove que é possível obter a decomposição LU de A sem trocas de linhas (Sugestão: prove que se A é diagonal dominante e inversível, então $a_{11} \neq 0$. Depois, prove por indução que em cada etapa k da triangularização, a submatriz $(n - k) \times (n - k)$ é diagonal dominante e inversível).

Exercício 15 A matriz de Frobenius G_j que é usada na etapa j do método de eliminação de Gauss pode ser representada na forma

$$G_j = I - \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T,$$

onde I é a matriz identidade e e_k é o k-ésimo vetor da base canônica do R^n. Usando a representação acima, prove que

$$G_j^{-1} = I + \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T.$$