Fundamentos de Análise Numérica - BMAC - 2021
Nota sobre interpolação de Hermite

Considere a tabela obtida ao se tabelar uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sua derivada nos pontos $x_j,\ 0 \le j \le n$, ou seja $y_j = f(x_j),\ z_j = f'(x_j),\ 0 \le j \le n$, com $x_i \ne x_j$, se $i \ne j$. Escreve-se abaixo a tabela obtida

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_j & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_j & \dots & z_n \end{array} \tag{1}$$

O problema de interpolação de Hermite é encontrar um polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a $2n+1$ tal que, para $0 \le j \le n$, tem-se $P(x_j) = y_j$ e $P'(x_j) = z_j$. Esse polinômio $P(x)$ será denominado polinômio interpolador de Hermite da tabela 1.
Uma primeira questão a analisar é a unicidade de tal polinômio, se ele existir.
Isso não é complicado, e é deixado como exercício para o leitor, com uma "dica" para auxiliar.

Questão 1 Prove que a solução do problema de interpolação de Hermite dado pela tabela (1) é única.
Sugestão: Veja que, se $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios e $Q(x)R(x)$ é o polinômio nulo, então $Q(x) \equiv 0$ ou $R(x) \equiv 0$.

Agora estuda-se o problema da existência do polinômio interpolador de Hermite da tabela dada, e, além disso o problema de determinar qual é esse polinômio.
Para analisar este problema considere os seguintes casos particulares:

1. Para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ seja $P_j(x)$ o polinômio interpolador de Hermite da tabela em que, para $i \ne j$, $y_i = 0$, $y_j = 1$, e, para todos os $i,\ z_i = 0$.

2. Para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ seja $Q_j(x)$ o polinômio interpolador de Hermite da tabela em que, para todo i, $y_i = 0$, $z_j = 1$ e, para todos os $i \ne j,\ z_i = 0$.

Ou seja, P_j e Q_j são os polinômios interpoladores de Hertmite relativos respectivamente às tabelas

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \tag{2}$$

e

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \tag{3}$$

Para calcular o polinômio $P_j(x)$, que interpola a tabela (2) note que, para $0 \le k \le n,\ k \ne j$, x_k é raiz dupla de $P_j(x)$, assim $P_j(x)$ é múltiplo de $R_j(x) = \prod_{k=0,k\ne j}^{n} (x - x_k)^2$.
Como o grau de $R_j(x)$ é $2n$ e o grau de $P_j(x)$ é *menor ou igual a* $2n + 1$ tem-se que $P_j(x) = (\alpha_j x + \beta_j)R_j(x)$, para convenientes reais α_j e β_j. Portanto $P'_j(x) = (\alpha_j x + \beta_j)R'_j(x) + \alpha_j R_j(x)$.

Uma vez que $P_j(x_j) = 1$ e $P'_j(x_j) = 0$, resultam das observações do parágrafo anterior as equações lineares:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_j(x_j) & = & x_j R_j(x_j)\alpha_j + R_j(x_j)\beta_j = 1 \\ P'_j(x_j) & = & (x_j R'_j(x_j) + R_j(x_j))\alpha_j + R'_j(x_j)\beta_j = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Como $R_j(x_j) \neq 0$ (pois os x_i são dois a dois distintos), e o determinante de (4) é $\Delta_j = -(R_j(x_j))^2$, tem–se que esse sistema linear tem solução única, e um cálculo direto mostra que essa solução é $\alpha_j = \frac{R'_j(x)}{\Delta_j}$ e $\beta_j = -\frac{x_j R'_j(x_j) + R_j(x_j)}{\Delta_j}$. Assim, tem–se que

$$P_j(x) = \frac{R_j(x)}{\Delta_j}(R'_j(x_j)x - x_j R'_j(x_j) + R_j(x_j)) \tag{5}$$

O cálculo de $Q_j(x)$ é feito com considerações semelhantes, note novamente que, para $0 \leq k \leq n,\ k \neq j$, x_k é raiz dupla de $Q_j(x)$, e x_j é raiz simples desse polinômio, assim $Q_j(x)$ é múltiplo de $T_j(x) = (x - x_j)R_j(x)$. Como o grau de $Q_j(x)$ deve ser menor ou igual a $2n + 1$ e o grau de $T_j(x)$ é $2n + 1$, resulta de pronto que $Q_j(x) = \gamma_j T_j(x)$, para alguma conveniente constante real γ_j. Ademais, como claramente Q_j não é o polinômio nulo, claro que $\gamma_j \neq 0$.
Note que $T'_j(x) = R_j(x) + (x - x_j)R'_j(x)$, portanto $T'_j(x_j) = R_j(x_j) \neq 0$.
Como $Q'_j(x) = \gamma_j T'_j(x)$, ao impor a condição $Q'_j(x_j) = 1$, obtém–se $\gamma_j R_j(x_j) = 1$, portanto

$$Q_j(x) = \frac{1}{R_j(x_j)} T_j(x). \tag{6}$$

Observação 1 *Note que o grau de P_j é $2n+1$ sempre que $R'_j(x_j) \neq 0$ e, se $R'_j(x_j) = 0$, o grau de P_j é necessariamente $2n$ (demonstre isto como exercício). Já o grau de $Q_j(x)$ é claramente igual a $2n + 1$.*

Questão 2 Prove que $\{P_j(x), Q_j(x),\ 0 \leq j \leq n\}$ é uma base do espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a $2n + 1$.

Agora, uma substituição imediata mostra que o problema de interpolação de Hermite determinado pela talela (1) tem como solução

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(y_k P_k(x) + z_k Q_k(x)\right). \tag{7}$$