Algoritmo de Gauss Seidel

Considere primeiro a situação simples de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

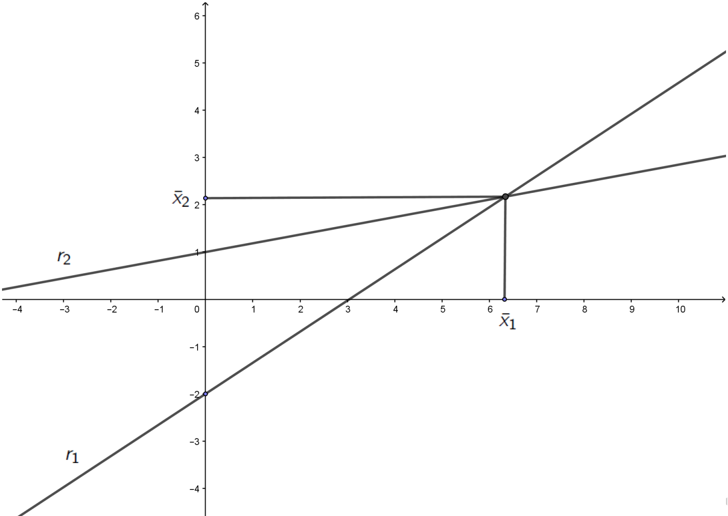
$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Cada uma das equações acima está associada a uma *reta* em $\mathbb{R}^2$:

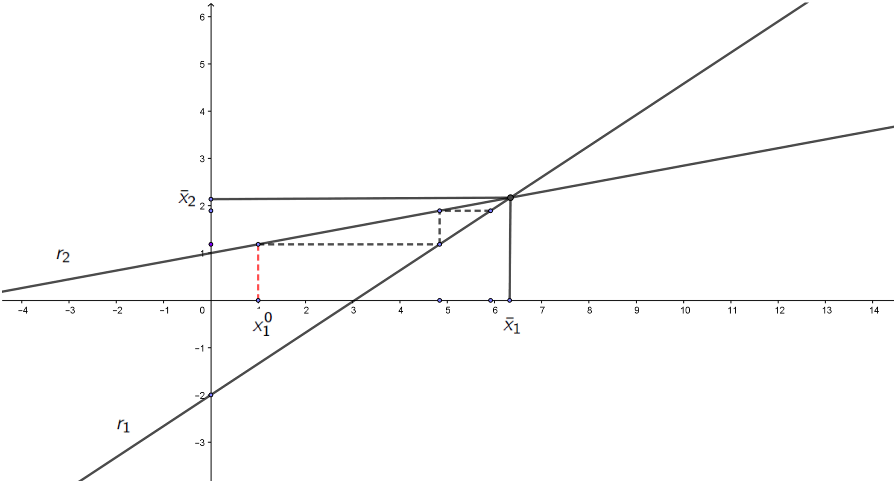
$$r_1 : \quad \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\right\}$$

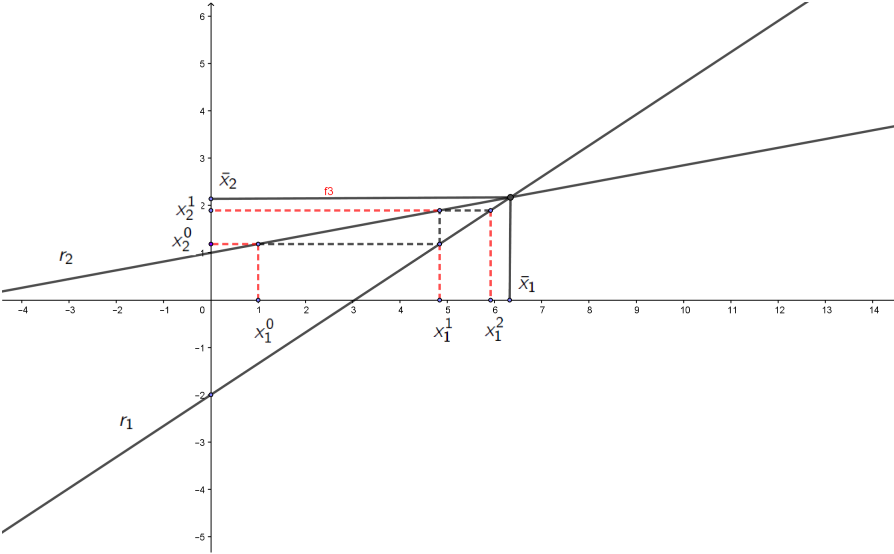
$$r_2 : \quad \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\right\}$$

Obter os valores de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, solução do sistema linear consiste em determinar o ponto em que as retas r_1 e r_2 interceptam.



O prodedimento do Método de Gauss Seidel consiste em um procedimento iterativo de aproximações sucessivas como indicado nas figuras a seguir:




6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
$\bar{x}_2$
f3
x_2^1
x_2^0
r_2
$\bar{x}_1$
x_1^0
x_1^1
x_1^2
r_1

Em termos algébricos, a partir de uma *aproximação inicial* x_1^0 (ou x_2^0), geramos uma sequência de aproximações $\left\{(x_1^k, x_2^k)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ utilizando as seguintes fórmulas:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{k+1}]$$

Questão: Sob quais *hipóteses* temos a convergência:

$$(x_1^k, x_2^k) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Para responder a esta questão, consideramos a diferença

$$\bar{x}_1 - x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}\bar{x}_2] - \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k]$$

as igualdades

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}\bar{x}_2]$$

é devido ao fato de que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é um ponto da reta r_1 e

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k]$$

é a definição de x_1^{k+1}.

De forma semelhante:

$$\bar{x}_2 - x_2^k = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}\bar{x}_1] - \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^k]$$

as igualdades

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}\bar{x}_1]$$

é devido ao fato de que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é um ponto da reta r_2 e

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^k]$$

é a definição de x_2^k.

Assim obtemos:

$$\bar{x}_1 - x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}\bar{x}_2] - \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k]$$

$$\bar{x}_1 - x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}[\bar{x}_2 - x_2^k] \implies$$

$$\bar{x}_1 - x_1^{k+1} = -\frac{1}{a_{11}}\left\{\frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}\bar{x}_1] - \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^k]\right\} \implies$$

$$\bar{x}_1 - x_1^{k+1} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{a_{21}}{a_{22}}[\bar{x}_1 - x_1^k]$$

Definindo

$$\beta = \mid \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \mid$$

temos:

$$\mid \bar{x}_1 - x_1^{k+1} \mid = \beta \mid \bar{x}_1 - x_1^{k} \mid$$

$\Longrightarrow$

$$\mid \bar{x}_1 - x_1^{k+1} \mid = \beta^k \mid \bar{x}_1 - x_1^{1} \mid$$

Podemos então concluir que se $\beta < 1$

$$\mid \bar{x}_1 - x_1^{k+1} \mid \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Com uma análise análoga podemos concluir que:

$$| \bar{x}_2 - x_2^{k+1} | = \beta^k | \bar{x}_2 - x_2^1 |$$

e portanto

$$| \bar{x}_2 - x_2^{k+1} | \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Observe que trocando a ordenação das equações temos:

$$a_{11} \longleftrightarrow a_{21}$$

$$a_{12} \longleftrightarrow a_{22}$$

e como consequência:

$$\beta \longleftrightarrow \frac{1}{\beta}$$

de forma que se $\beta > 1$, trocando a ordenação das equações obtemos $\beta < 1$.