Limite de Função

Def. Dizemos que um intervalo aberto N é vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}$ se $N(p) = (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$.

Nesse caso dizemos que N é vizinhança de p de raio ε.

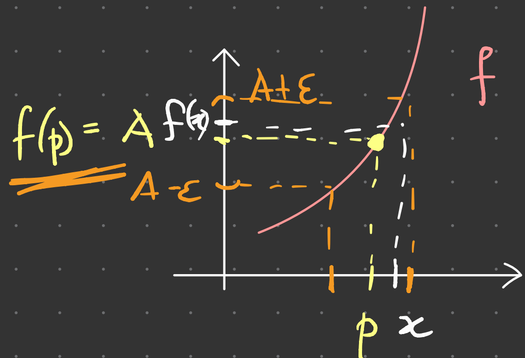
OBS: Note que se $x \in N$ então $|x-p| < \varepsilon$.

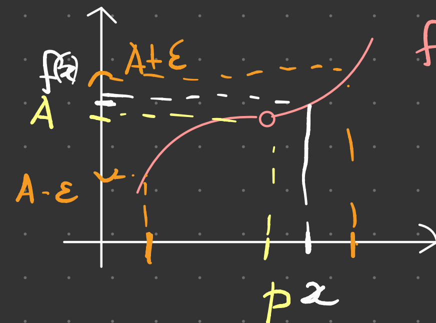
Def. Dizemos que o limite de $f(x)$ qdo $x \to p$ é $A \in \mathbb{R}$ qdo para toda vizinhança de $N(A)$ de A, existe uma vizinhança $N(p)$ de p com $f(x) \in N(A)$ $\forall x \in N(p)$ com $x \neq p$ $(*)$

Notação: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$.

OBS: (i) Note que $N(p)$ depende de $N(A)$.

(ii) Não importa quão pequena seja $N(A)$, existe $N(p)$ satisfazendo $(*)$.





$$\lim_{x \to p} f(x) = A$$

(iii) Se $\varepsilon > 0$ é o raio de $N(A)$, então $f(x) \in N(A)$ é equivalente a $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall$ $x \in N(p)$ com $x \neq p$.

i.e. com $0 < |x - p| < \delta$ onde δ é o raio de $N(p)$.

$\therefore \lim_{x\to p} f(x) = A$ se somente se dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ tal que

$|f(x)-A|<\varepsilon$ sempre que

$0<|x-p|<\delta$.

Exemplos: 1) $\begin{cases} f(x)=c \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$. Então $\lim_{x\to p} f(x) = c \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Com efeito para qq. $\varepsilon>0$ e todo $\delta>0$ temos

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Em particular sempre que $0<|x-p|<\delta$ $\forall\, \delta>0$.

2) $\begin{cases} \text{Se } f(x) = x, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ então $\lim_{x \to p} f(x) = p \quad \forall\, p \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - p| < \varepsilon \iff |x - p| < \varepsilon$$

$\therefore$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \varepsilon$ tal que

$|f(x) - p| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \varepsilon$.

3) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$.

$$|f(x) - (-1)| = |f(x) + 1| < \varepsilon \quad \text{i.e.}$$

$$|x^2 - 2x + 1| < \varepsilon \iff (x-1)^2 < \varepsilon$$

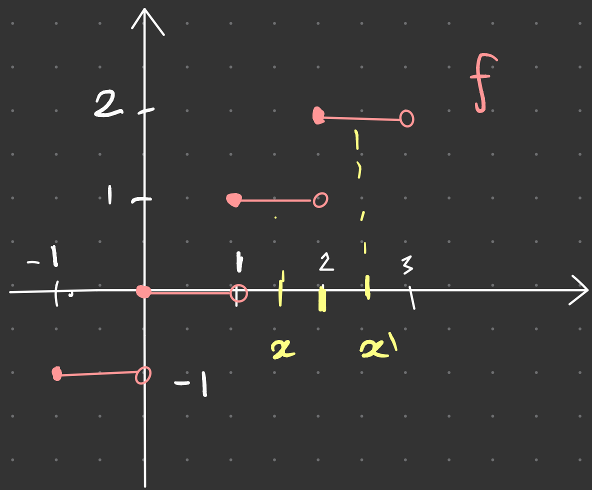
$$\iff |x-1| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \sqrt{\varepsilon}$ tal que

$|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \delta$.

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = -1.$$

4) Seja $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$ (maior inteiro menor ou igual a x).



Se $p \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\lim_{x \to p} [x] = [p]$.
(Exercício)

Se $p \in \mathbb{Z}$ $\lim_{x \to p} [x]$ não existe!

$x \simeq 2$ com $x < 2$ $f(x) = 1 \Rightarrow f(x) \to 1$

$x \simeq 2$ com $x \geq 2$ $f(x) = 2 \Rightarrow f(x) \to 2$

qdo $x \to 2$

De fato, se $p \in \mathbb{Z}$, $|f(x) - f(y)| \geq 1$

sempre que $x < p < y$ já que

$$f(x) = [x] \leq p-1 \quad \text{pois} \quad x < p \in \mathbb{Z}$$

e $f(y) = [y] \geq p$ pois $y > p$.

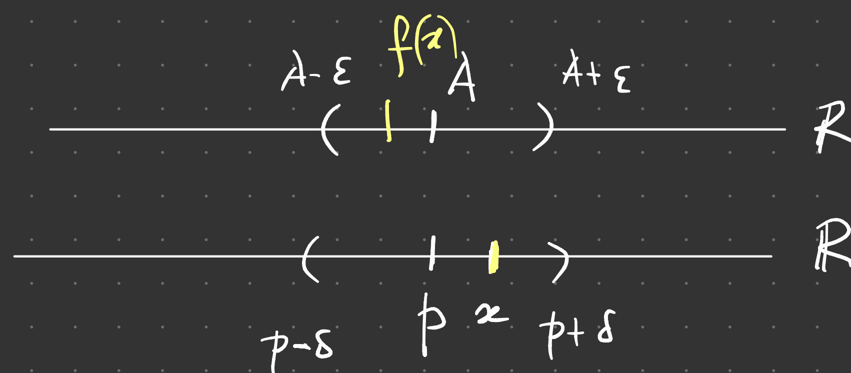
$$\therefore \nexists \lim_{x \to p} [x] \,!$$

Limite lateral à direita

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dada uma vizinhança } N(A), \text{ existe} \\ N(p) \text{ tal que } f(x) \in N(A) \\ \text{sempre que } x > p. \end{array} \right.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que

$0 < x - p < \delta$.



Limite Lateral à esquerda

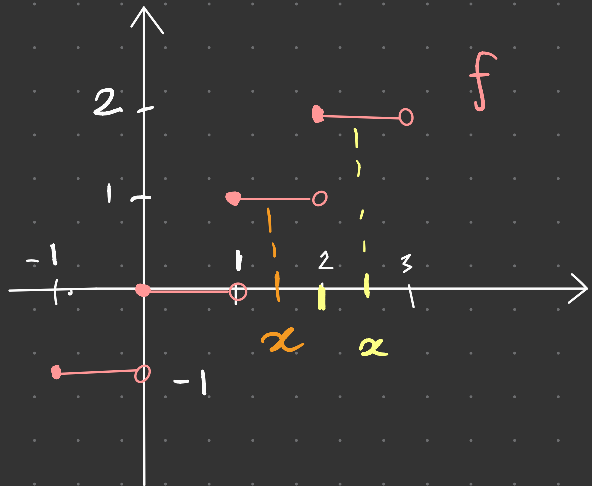
$$\lim_{x \to p^-} f(x) = A$$

Dado $N(A)$ existe $N(p)$ tal que $f(x) \in N(A)$ sempre que $x \in N(p)$ com $x < p$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que $0 < p - x < \delta$.

Teo. $$\lim_{x \to p} f(x) = A \iff \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = A.$$

4) Seja $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$ (maior inteiro menor ou igual a x).



$$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2.$$ Com efeito

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = 1$ tal que

$$|[x] - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < x - 2 < 1$$

Rascunho: $0 < x - 2 < 1 \iff 2 < x < 3 \rightsquigarrow [x] = 2.$

$\lim_{x \to 2^-} [x] = 1$ pois $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists \delta = 1$ tal que

$|[x] - 1| < \varepsilon$ sempre que

$0 < 2 - x < 1$.

Rascunho: $0 < 2 - x < 1 \iff 1 < x < 2$

e nesse caso $[x] = 1$ e $[x] - 1 = 0$.

OBS: $\lim_{x \to 2^+} [x] \neq \lim_{x \to 2^-} [x]$.

Teo. $\lim_{x \to p} f(x) = A \iff \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = A.$

dem. $\lim_{x \to p} f(x) = A$

$(\Rightarrow)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$

$\therefore$ $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que $-\delta < x - p < \delta$
$x \neq p$

$\Rightarrow \lim_{x \to p^+} f(x) = A$ e $\lim_{x \to p^-} f(x) = A.$

$(\Leftarrow)$ $\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = A$

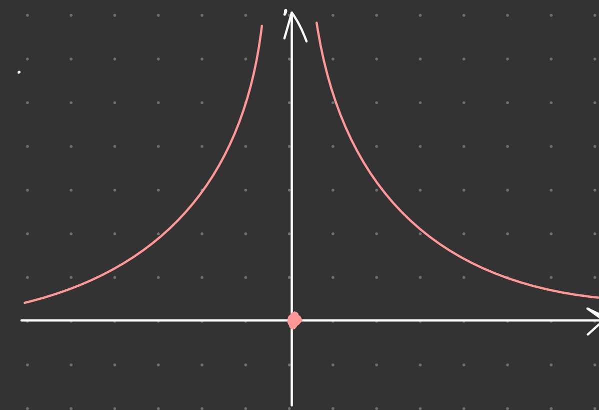
Dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_+ > 0$ tq. $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que $0 < x - p < \delta_+$. Analogamente, $\exists$ $\delta_- > 0$ tq. $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que $0 < p - x < \delta_-$.

Logo se $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$, temos

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ sempre } 0 < |x - p| < \delta.$$

$$\therefore \lim_{x \to p} f(x) = A \quad \boxtimes$$

Exemplos: 5) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



O que podemos dizer de

$$\lim_{x \to 0} f(x) \ ?$$

$$\frac{1}{x^2} > M > 0 \iff \frac{1}{M} > x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{M}} > |x|$$

Logo, dado $M > 0$ qualquer, $\exists\ \delta = 1/\sqrt{M}$ tal que

$f(x) > M$ sempre que $|x - 0| = |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$.

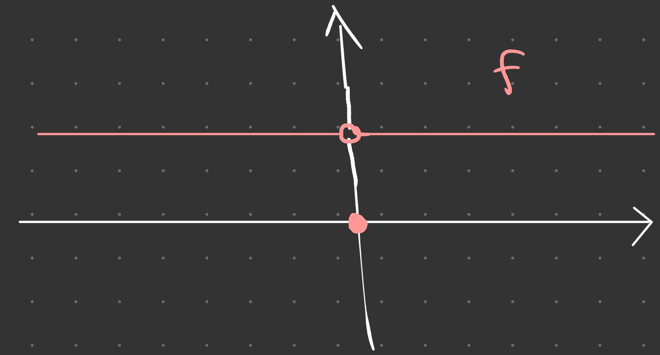
Assim $\nexists A \in \mathbb{R}$ tq. $\lim_{x \to 0} f(x) = A$.

Pois para $M = A+1$ temos $f(x) > A+1$

se $\boxed{|x| < \frac{1}{\sqrt{A+1}}}$ $\Longleftrightarrow$ $f(x) - A > 1$

Define uma vizinhança de 0.

6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Observe $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ mas $f(0) = 0 \neq 1$.

f é descontínua.

Funções contínuas

$f : D \mapsto \mathbb{R}$ é contínua

$p \in D$ se $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.