

COMP III - 5/10/2021

NORMAS E ESTABILIDADE

SISTEMA LINEAR

$$Ax = b$$

SUPONHA QUE ELE FOI RESOLVIDO PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, COM BALANÇAMENTO EXPLÍCITO E CONDENSACÃO PIVOTAL.

ORÇ NOS CASOS ONDE O BALANÇAMENTO E A CONDENSACÃO PIVOTAL NÃO SÃO NECESSÁRIOS, TEMOS RESULTADOS SIMILARES

$\tilde{x}$: SOLUÇÃO CALCULADA

PODE-SE "MOSTRAR" QUE, EM GERAL, $\tilde{x}$ É SOLUÇÃO EXATA DE UM PROBLEMA PERTURBADO

$$(A + E)x = b$$

ONDE A MATRIZ E É "PEQUENA" EM RELAÇÃO À MATRIZ A

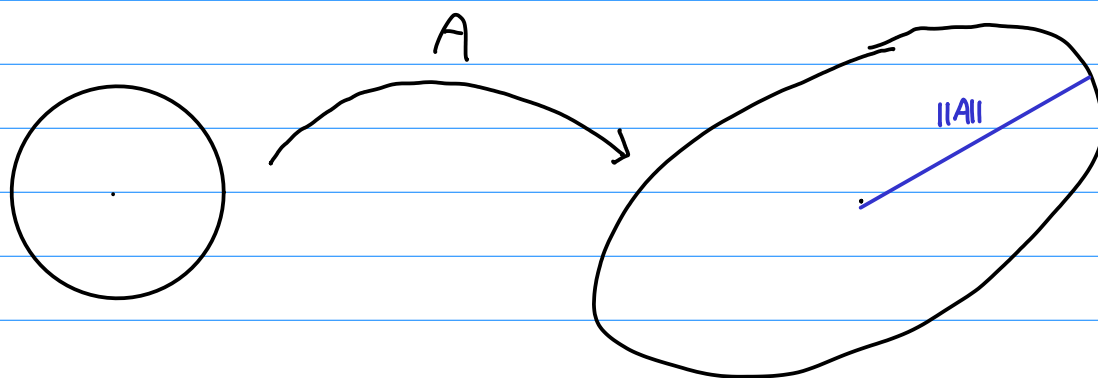
NORMAS DE MATRIZES

SUBORDINADAS À UMA NORMA

DO $\mathbb{R}^n$

SUPONHA QUE $\|\cdot\|$ SEJA UMA NORMA NO $\mathbb{R}^n$. A NORMA DE UMA MATRIZ SUBORDINADA A ESTA NORMA É UMA MEDIDA DA DEFORMAÇÃO CAUSADA PELA APLICAÇÃO DE A A VETORES:

$$\|A\| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$



PROPRIEDADES

1) A DEFINIÇÃO ACIMA DEFINE DE FATO UMA NORMA NO ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES $n \times n$ (M_n)

(i) $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $A \in M_n$

(ii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in M_n$

(iii) $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in M_n$ E $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (MATRIZ NULA)

2) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $\forall A \in M_n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(DIZEMOS QUE ESTA NORMA DE MATRIZ É CONSISTENTE COM A NORMA DE $\mathbb{R}^n$)

(OBS: $\|A\| = \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c \cdot \|x\|\}$)

3) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, $\forall A, B \in M_n$

EXEMPLOS

(i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$; $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$

(ii) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$; $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$

$$(iii) \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\|A\|_2 = \rho(A^T A)^{1/2}$$

ONDE $\rho(B)$ É O RAIO ESPECTRAL DE B, QUE É IGUAL A $\max\{|\lambda| : \lambda \text{ É AUTOVALOR DE } A\}$.

VOLTANDO AO PROBLEMA DE ERROS DE ARREDONDAMENTO:

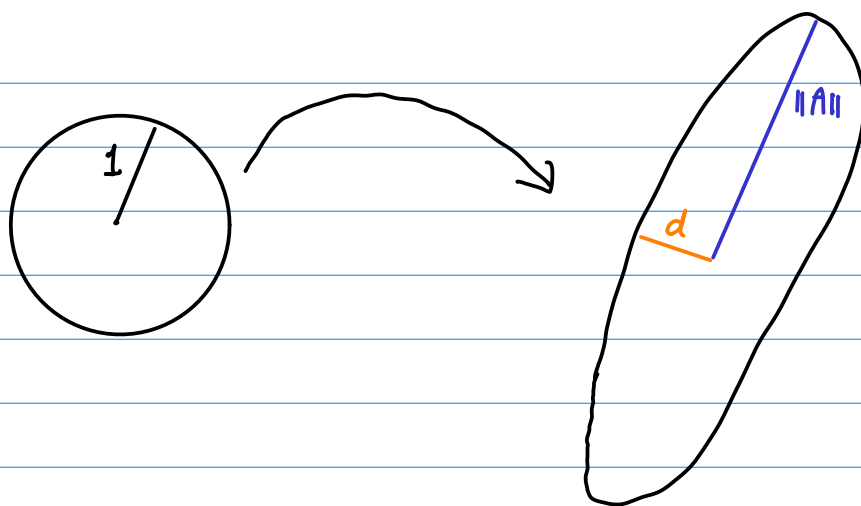
$\tilde{x}$: SOLUÇÃO CALCULADA DE $Ax = b$ PELO M.E.G. C/ BALANCEAMENTO E COND. PIVOTAL

↳ SOLUÇÃO EXATA DE $(A+E)x = b$, ONDE, EM GERAL, TEMOS

$$\frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty} = O(10^{-t})$$

ONDE ESTAMOS USANDO t ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS
 NESTE SENTIDO, DIZEMOS QUE O MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS É ESTÁVEL

MESMO ASSIM, PODEMOS TER PROBLEMAS DE SENSIBILIDADE EM RELAÇÃO À PERTURBAÇÃO DE PARÂMETROS. PODEMOS TER O QUE É CHAMADO DE UM PROBLEMA MAL CONDICIONADO: A SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA PERTURBADO ESTÁ DISTANTE DA SOLUÇÃO EXATA.



QUANTO MAIOR FOR $\|A\|/d$, MAIOR A SENSIBILIDADE A PERTURBAÇÕES.
PODE-SE MOSTRAR QUE

$$d = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\frac{\|A\|}{d} = \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} - \text{NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ}$$

OBS $\kappa(A) \geq 1$, PARA QUALQUER NORMA SUBORDINADA, POIS
 $\downarrow$ IDENTIDADE

$$(a) \|I\| = \max_{\|x\|=1} \|I \cdot x\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

$$(b) 1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

TEOR: SUPONHA QUE $\kappa(A) \cdot \frac{\|E\|}{\|A\|} < 1$. ENTÃO, SE $\bar{x}$

É A SOLUÇÃO DE $Ax = b$ E $\tilde{x}$ É A SOLUÇÃO DE $(A+E)x = b$, TEMOS

$$\frac{\|\bar{x} - \tilde{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{\kappa(A) \cdot \|E\| / \|A\|}{1 - \kappa(A) \|E\| / \|A\|}$$

NA PRÁTICA, PARA O M.E.G.,

$\bar{x}$: SOLUÇÃO EXATA DE $Ax = b$

$\tilde{x}$: SOLUÇÃO CALCULADA = SOLUÇÃO EXATA DE $(A+E)x = b$

$$\frac{\|E\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} \simeq 10^{-t} \quad (t \text{ ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS})$$

$$\kappa_{\infty}(A) \simeq 10^p; \quad p < t$$

$$\kappa_{\infty}(A) \cdot \frac{\|E\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} \simeq 10^{-(t-p)} < 1$$

$$\frac{\|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|\bar{x}\|_{\infty}} \simeq \frac{10^{-(t-p)}}{1 - 10^{-(t-p)}} \simeq 10^{-(t-p)}$$

$\Rightarrow \tilde{x}$ TEM APROXIMADAMENTE $t-p$ DÍGITOS CORRETOS

(*) EXISTEM ALGORITMOS PARA SE ESTIMAR O NÚMERO DE CONDIÇÃO DE UMA MATRIZ, APROVEITANDO AS CONTAS DA TRIANGULARIZAÇÃO DA MATRIZ. (VER O PACOTE LAPACK)