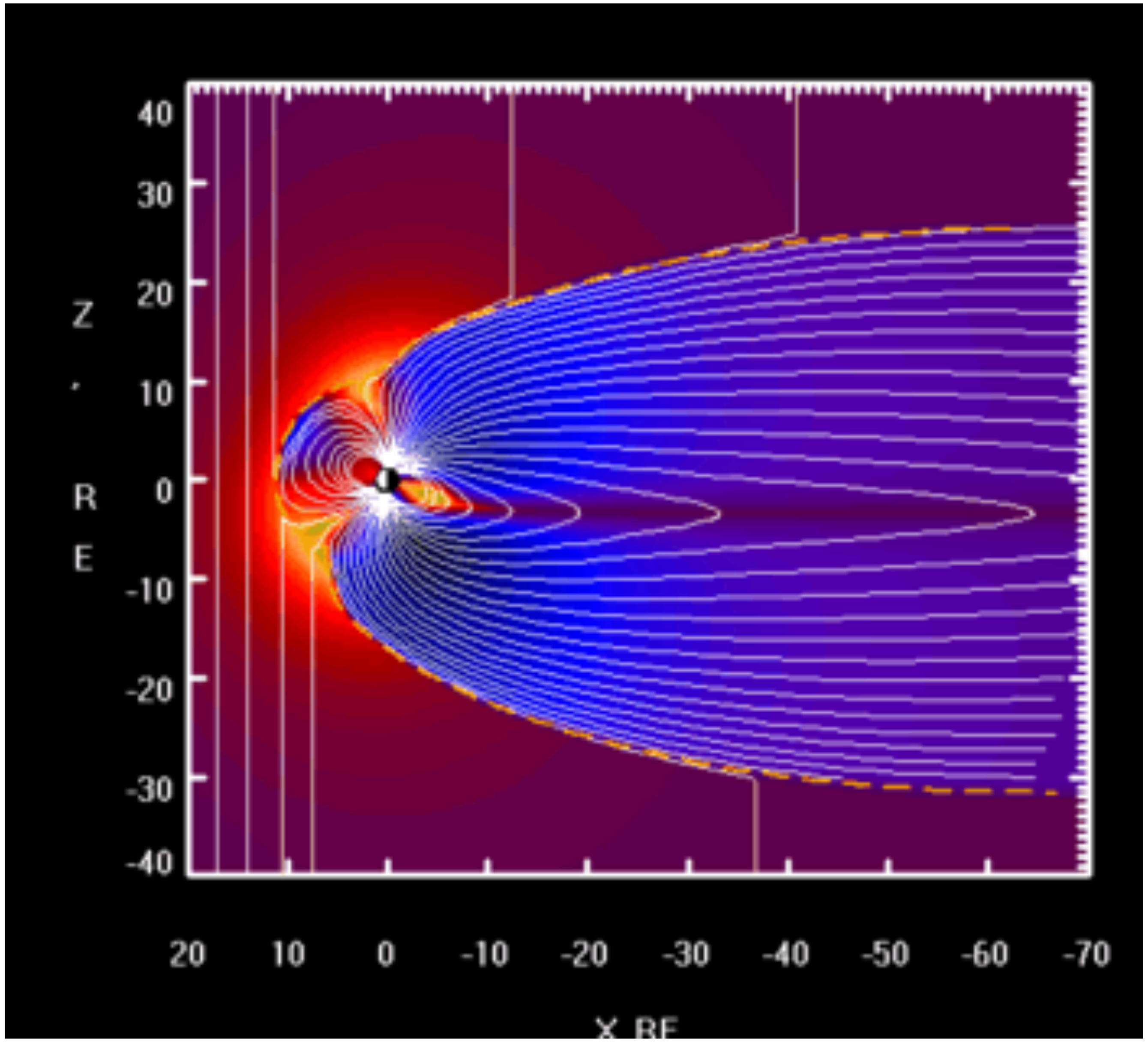
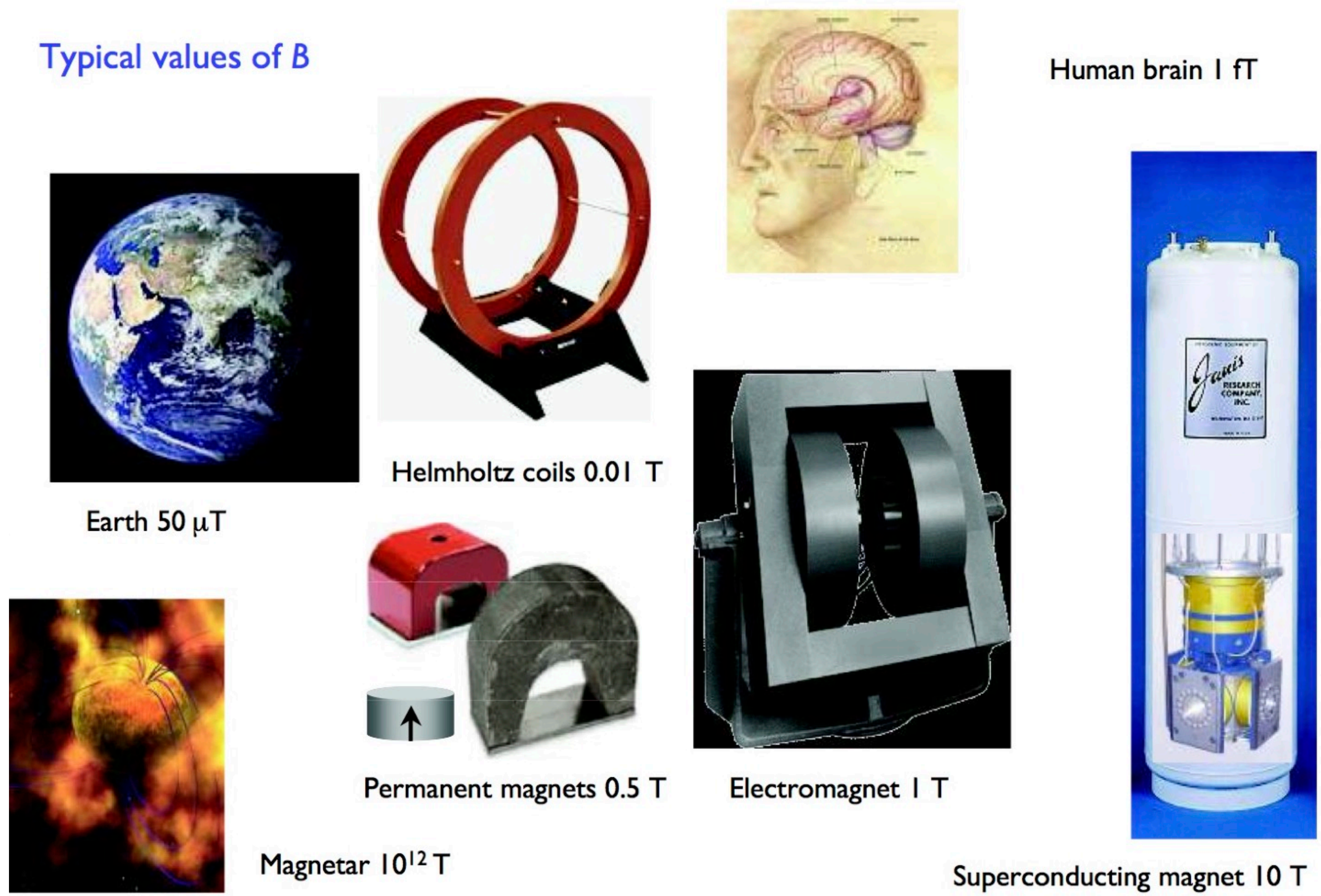
Magnetostática

⚡Expansão multipolar
⚡Dipolos magnéticos
⚡Exemplos e exercícios



Campos magnéticos na natureza



Magnetostática

- Seguimos considerando os campos magnéticos gerados por ***correntes estacionárias:***

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- Sob essas condições, o campo magnético obedece as leis de Ampère/Biot-Savart, além da "Lei de Gauss" para o magnetismo, que nos diz que não existem fontes "pontuais" do campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- As equações acima são as Equações de Maxwell para a magnetostática. Podemos também introduzir o potencial-vetor.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Usando o calibre de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$

- Em ***coordenadas Cartesianas*** a solução para ***cada componente***, A_x, A_y e A_z, é exatamente a mesma que encontramos no caso da eletrostática para Equação de Poisson. De fato, a equação acima ***é a equação de Poisson***, e sob condições de contorno "normais" temos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad .$$

Magnetostática

- Podemos finalmente utilizar a expressão acima para encontrar o campo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

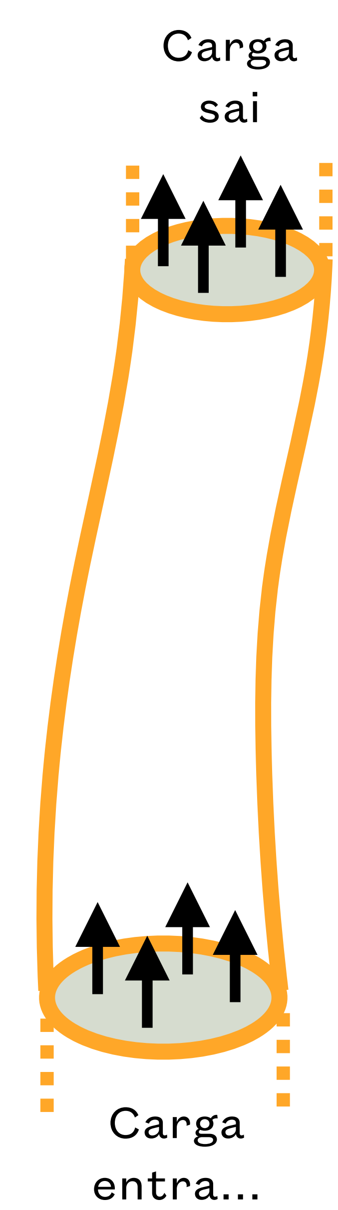
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

- Aplicando o rotacional na primeira expressão nos leva à solução formal:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \vec{J}(\vec{r}\,') \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) \quad ,$$

e a solução mais familiar da Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l}\,' \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) \quad .$$



Condições de contorno da magnetostática

- Usando as Equações de Maxwell para a magnetostática:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \, ,$$

podemos encontrar as condições de contorno para o campo magnético:

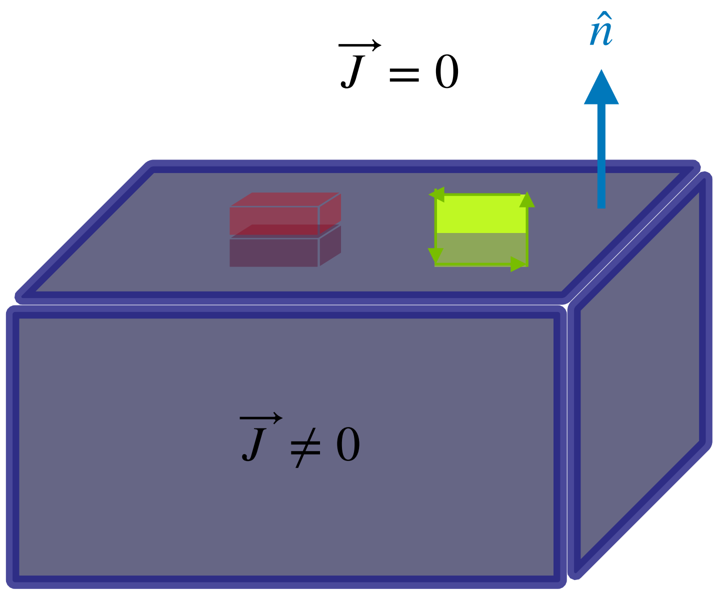
$$\Delta \vec{B}_{||} = \mu_0 \vec{K}_{||} \times \hat{n} \qquad \text{e} \qquad \Delta B_{\perp} = 0 \quad ,$$

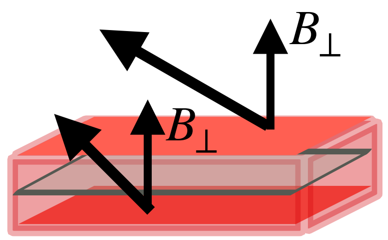
onde a ***corrente superficial*** é: $\vec{K} = \int dn \; \vec{J}$

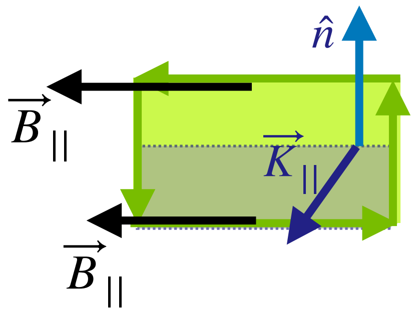
com n denotando a direção normal à interface.

- Essas condições também podem ser expressas em termos do potencial-vetor:

$$\Delta \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \right) = - \mu_0 \vec{K} \qquad \text{e} \qquad \Delta \vec{A} = 0$$







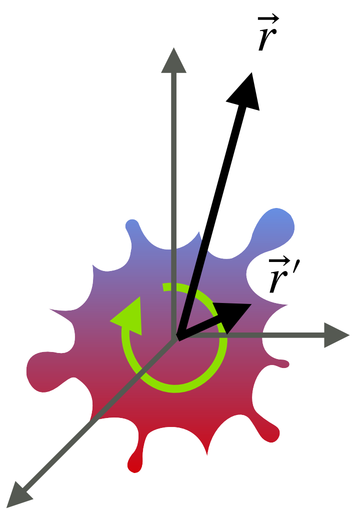
Expansão multipolar na magnetostática

- Vamos trabalhar agora com a nossa solução formal para o potencial-vetor em termos da densidade de corrente:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

(onde, lembre-se, estamos usando o *gauge* de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

- Agora, note que o denominador é aquele mesmo termo $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$, que usamos na expansão em multipolos na Eletrostática:



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_\ell \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

- Substituindo isso na expressão para o potencial-vetor temos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \vec{J}(\vec{r}\,') \sum_\ell \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

- Vamos supor que estamos calculando um problema do tipo "in": as cargas estão em torno da origem, e os campos estão sendo calculados na região exterior. Temos então:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\ell r^{-\ell-1} \, \vec{J}_\ell(\hat{n}) \quad , \quad \text{onde}$$

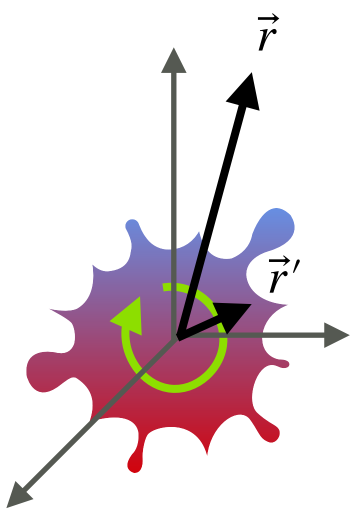
$$\vec{J}_\ell(\hat{n}) = \int dV' \, r'^\ell \, P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \, \vec{J}(\vec{r}\,')$$

denotam os ***multipolos da densidade de corrente***.

Expansão multipolar na magnetostática

- Existem algumas sutilezas da expansão multipolar de um campo vetorial, que a distinguem do caso da expansão multipolar da densidade de cargas. Mas vamos agora explorar esses multipolos da densidade de corrente (e portanto do campo magnético) como definidos acima:

$$\vec{J}_\ell(\hat{n}) = \int dV' \, r'^\ell \, P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \, \vec{J}(\vec{r}\,')$$



- Vamos primeiro olhar para o primeiro termo dessa expansão: o **monopolo** ($\ell = 0$). Como $P_0 = 1$ temos:

$$\vec{J}_0 = \int dV' \, \vec{J}(\vec{r}\,')$$

- Agora, esse termo deve ser zero, certo? Ora… na magnetostática temos $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, então isso tem que ser zero… Mas vamos ***demonstrar*** isso.
- Vamos pensar numa corrente integrada dentro de um certo volume. O resultado só deveria ser ***não-nulo*** se tivermos cargas ***entrando*** ou ***saindo*** desse volume, certo?
- Quem expressa essa relação é a ***equação da continuidade*** , portanto vamos usar essa equação na nossa demonstração:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Evidentemente, a variação da carga dentro do volume é:

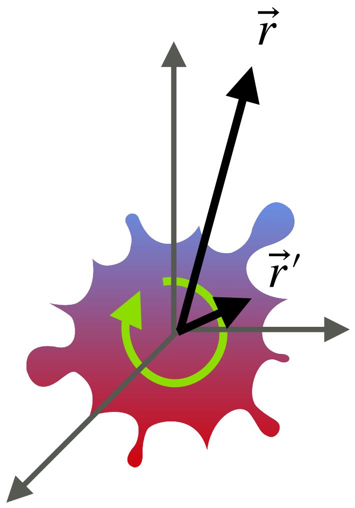
$$\frac{\partial Q_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \, \rho \; \rightarrow \; 0$$ desde que especificamos que todas as cargas permanecem dentro do nosso volume.

Expansão multipolar na magnetostática

- Agora vamos retornar à nossa integral para o "monopolo" da densidade de corrente, e vamos escrever cada componente da densidade de corrente como:

$$\int_V dV' \, J^i(\vec{r}\,') \;=\; \int_V dV' \, \sum_j J^j \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \;=\; \int_V dV' \, \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial x'^j} \left(x'^i J^j \right) - x'^i \frac{\partial J^j}{\partial x'^j} \right]$$

- Esse último termo é nada mais nada menos que o divergente de $\vec{J}$, $\sum_j \partial_j J_j = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$, que deve ser zero se estamos no reino da magnetostática. Assim, apenas o primeiro termo sobrevive, e nesse caso podemos utilizar o teorema do divergente para escrever:



$$\int_V dV' \, J^i \;=\; \int_V dV' \, \sum_j \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(x'^i J^j \right) \;=\; \sum_j \oint_{S(V)} dS'_j \; x'^i \, J^j$$

- Agora basta tomar um volume suficientemente grande tal que todas as cargas e correntes estão lá dentro da superfície desse volume, e a integral se anula. Ou seja, o ***monopolo da densidade de corrente sempre é zero*:**

$$\vec{J}_0 = \int_V dV' \, J^i(\vec{r}\,') \;=\; 0$$

- Por sinal, esse mesmo argumento pode ser usado para mostrar a identidade:

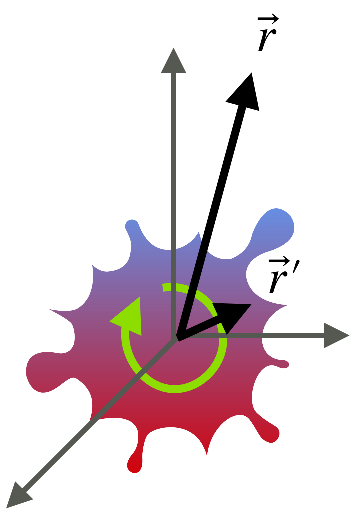
$$\int_V dV' \, \left(x'^i \, J^j + x'^j \, J^i \right) \;=\; 0 \qquad , \qquad \text{que será útil daqui a pouco.}$$

Expansão multipolar na magnetostática

- OK, então o monopole é nulo — e de um modo geral, o campo magnético não tem um monopolo. De fato, a equação-chave aqui é a "Lei de Gauss" do magnetismo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Vamos comparar isso com a Lei de Gauss mesmo, para o campo elétrico: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$. Entre as densidades de cargas possíveis, as cargas pontuais são as mais simples, e constituem os "monopolos fundamentais" do campo elétrico:



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$$

- Claramente, uma integral dessa equação em torno de um volume infinitesimal em torno dessa carga retorna o "campo de monopolo":

$$\vec{E} \to \frac{q}{\epsilon_0}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\,\vec{r} - \vec{r}_q\,|^3}$$

- Mas para o campo magnético não existem essas "cargas magnéticas", e portanto uma integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ em qualquer volume dá zero! E isso é que está na raiz do fato de que o campo magnético não possui um monopolo — ***nunca***.
- OK, muito bem, então o monopolo se anula. Mas e quanto ao próximo termo — o ***dipolo da densidade de corrente***?

$$\vec{J}_1(\hat{n}) \;=\; \int dV'\, r'^1\, P_1(\hat{n}\cdot\hat{n}')\;\vec{J}(\vec{r}\,') \;=\; \int dV'\, r'\,\hat{n}\cdot\hat{n}'\;\vec{J}(\vec{r}\,')$$

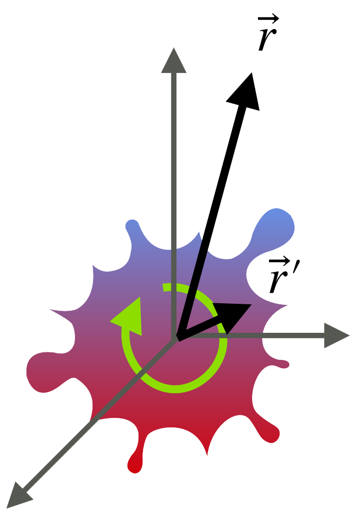
Dipolos magnéticos

- Vamos repetir aqui a expressão para o dipolo magnético da densidade de corrente:

$$\vec{J}_1(\hat{n}) = \int dV' \, r'^1 P_1(\hat{n}\cdot\hat{n}') \, \vec{J}(\vec{r}\,') = \int dV' \, r' \, \hat{n}\cdot\hat{n}' \, \vec{J}(\vec{r}\,')$$

$$= \int dV' \, \hat{n}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{J}(\vec{r}\,') = \sum_i \frac{x_i}{r}\int dV' \, x_i' \, \vec{J}(\vec{r}\,')$$

$$\Rightarrow \quad J_j = \sum_i \hat{x}_i \int dV' \, x_i' \, \vec{J}_j(\vec{r}\,')$$



- Nesse momento a identidade apresentada há pouco tempo atrás se torna útil:

$$\int_V dV' \left(x'^i J^j + x'^j J^i\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad J_j = \sum_i \hat{x}_i \frac{1}{2}\int dV' \left(x_i' \, \vec{J}_j - x_j' \, \vec{J}_i\right)$$

- Agora, considere a expressão acima à luz da identidade $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Fica evidente que:

$\vec{J}_1(\vec{r}) = \vec{m}\times\hat{r}$, onde definimos

$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dV' \, \vec{r}\,' \times \vec{J}(\vec{r}\,')$ como sendo o ***dipolo magnético*** da densidade de corrente $\vec{J}$.

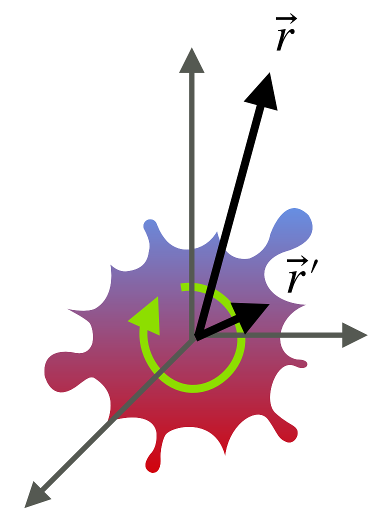
- Note que a convenção universalmente utilizada é chamar $\vec{m}$ de dipolo magnético, e não $\vec{J}_1$. Isso é para manter a analogia com o ***dipolo elétrico***:

$$\vec{p} = \int dV' \, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$$

O campo de dipolo magnético

- Temos então que:

$$\vec{J}_1(\vec{r}) = \vec{m} \times \hat{r} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int dV' \, \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \quad \text{é o dipolo magnético.}$$



- O potencial-vetor que corresponde a esse termo de dipolo vem da nossa expressão original:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\ell} r^{-\ell-1}\,\vec{J}_{\ell}(\hat{n}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} r^{-2}\,\vec{J}_1(\hat{n})$$

e portanto:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

- Note a analogia com o potencial elétrico de um dipolo elétrico:

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

- Note que a convenção universalmente utilizada é chamar $\vec{m}$ de dipolo magnético, e não $\vec{J}_1$. Isso é para manter a analogia com o ***dipolo elétrico***:

$$\vec{p} = \int dV' \, \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

O campo de dipolo magnético

- Temos então que:

$$\vec{J}_1(\vec{r}) = \vec{m} \times \hat{r} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int dV' \, \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \quad \text{é o dipolo magnético.}$$

- O potencial-vetor que corresponde a esse termo de dipolo vem da nossa expressão original:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\ell} r^{-\ell-1}\,\vec{J}_\ell(\hat{n}) \quad \Rightarrow \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} r^{-2}\,\vec{J}_1(\hat{n}) \quad , \quad \text{e portanto:}$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

- Note a analogia com o ***potencial elétrico*** de um ***dipolo elétrico***:

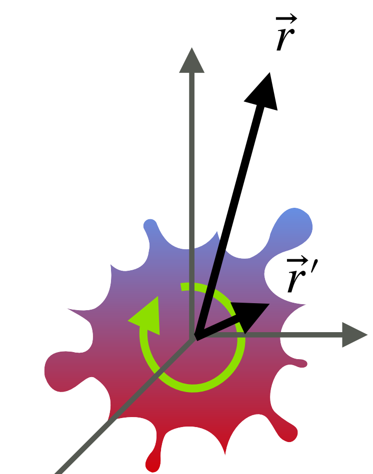
$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

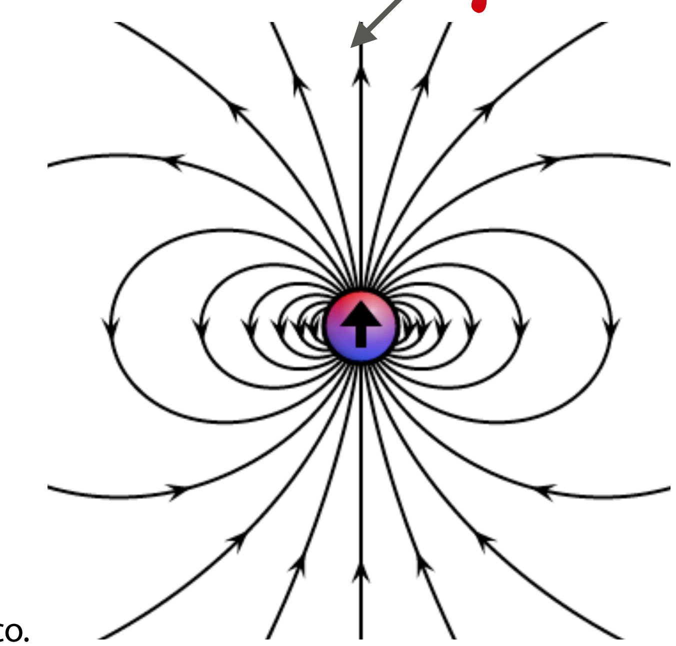
- O ***campo magnético*** de um ***dipolo magnético*** é obtido facilmente:

$$\vec{B}_1 = \nabla\times\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{r}(\vec{m}\cdot\hat{r})-\vec{m}}{r^3} \quad ,$$

Compare isso com o ***campo elétrico*** de um ***dipolo elétrico***:

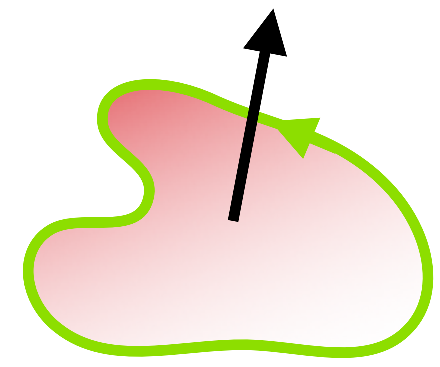
$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\phi_1 = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{3\hat{r}(\vec{p}\cdot\hat{r})-\vec{p}}{r^3}$$





- Os dois campos têm ***exatamente a mesma forma***, embora a origem de cada um seja completamente diferente! Devido a essa equivalência, chamamos essa configuração de "***campo de dipolo***", sem precisar especificar se é um dipolo elétrico ou magnético.

O campo de dipolo magnético



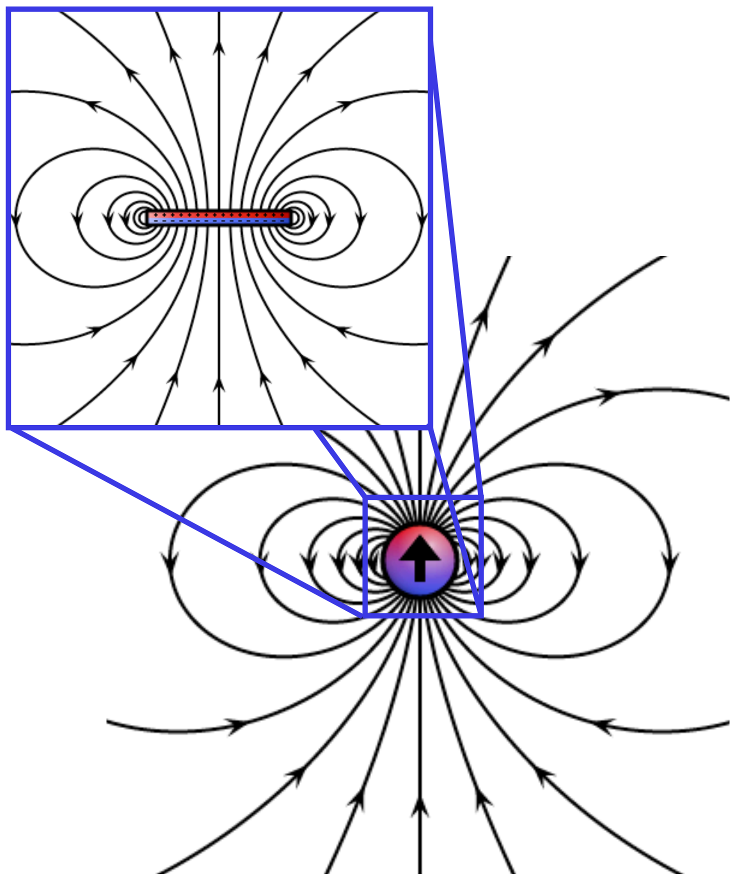
- O momento de dipolo magnético de um *loop* (laço) de corrente tem uma expressão simples em termos da área do *loop*:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV'\, \vec{r}\,' \times \vec{J}(\vec{r}\,') = \frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times (I d\vec{l}\,') = I\,\vec{S} \quad ,$$

onde $\vec{S}$ é a ***área do loop***. Um modo equivalente de escrever o momento magnético é em termos do momento angular das cargas que circulam pelo *loop*:

$$\vec{m} = \frac{q\,\vec{L}}{2\,M} \quad ,$$ onde $\vec{L}$ é o momento angular de uma cargas q com massa M.

[Veremos mais adiante que também podemos associar o momento de dipolo magnético com o spin das partículas. Você talvez já tenha ouvido falar do famoso "momento magnético anômalo do múon", que atualmente indica um desvio de quase 4σ com respeito ao Modelo Padrão de Partículas — o que pode indicar algo novo à vista!]



- Como vimos acima, o campo magnético de dipolo é, formalmente:

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{r}(\vec{m}\cdot\hat{r}) - \vec{m}}{r^3}$$

pode parecer que tem algo esquisito na origem, mas é claro que o campo de um loop real, finito, é sempre bem comportado, mesmo quando $r \to 0$.

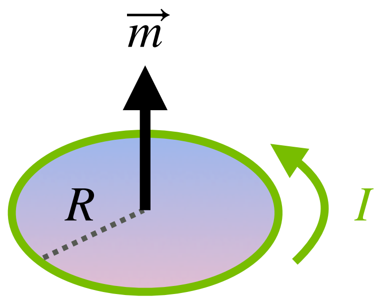
- Podemos ver melhor esse comportamento com a ajuda deste ***Notebook do Mathematica .***

- É claro que esse termo (dipolo, $\ell = 1$) é apenas o termo dominante numa expansão multipolar, e em geral há uma infinidade de termos de ordem mais alta. Porém, esses termos começam a ficar bastante complicados, então raramente nós vamos além de $\ell = 1$ no campo magnético.

Dipolos magnéticos: exemplos

- Como acabamos de ver, o dipolo magnético de um *loop* de corrente é dado em termos de sua área:

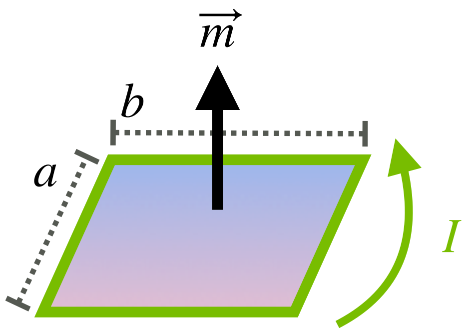
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV'\, \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') = \frac{1}{2}\int \vec{r}' \times (I d\vec{l}') = I\,\vec{S} \quad ,$$



  onde $\vec{S}$ é a ***área do loop***.

- O exemplo "clássico" é um *loop* circular de corrente, como mostrado na figura.

$$\vec{m} = I\,\vec{S} = \pi R^2\, I\, \hat{n}$$

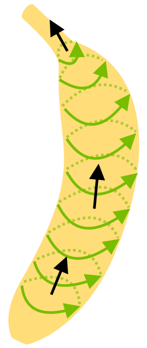


- Mas isso também vale para uma outra forma qualquer — por exemplo, um *loop* quadrado:

$$\vec{m} = I\,\vec{S} = ab\, I\, \hat{n}$$

- Mas isso também indica como podemos calcular o dipolo magnético de um **corpo extenso**, com uma densidade superficial de corrente ou mesmo uma densidade de corrente $\vec{J}$ qualquer:

  Basta quebrar essa densidade de corrente em *loops*, e depois somar os dipolos magnéticos de todos esses *loops*.



Dipolos magnéticos: exemplos

- Vamos considerar um exemplo de uma densidade volumétrica: uma casca esférica de raio R_0, com densidade superficial de carga uniforme σ_0, que gira com uma velocidade angular ω.
- A densidade superficial de corrente decorre da densidade superficial de carga e da rotação dessa casca esférica. A forma dessa densidade claramente deve ser algo como:

$$\vec{K} \to \sigma_0 \,\vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Note que, assim como a densidade de corrente tem dimensões de $[J] = [\rho]\,[v]$, a densidade superficial de corrente tem dimensões de $[K] = [\sigma]\,[v]$, portanto a expressão acima tem as dimensões corretas.
- Para ver que essa expressão está correta, note que:

$$\sigma_0 \,\vec{\omega} \times \vec{r} \;=\; \sigma_0 \,(\omega \hat{z}) \times \vec{r} \;=\; \sigma_0 \,\omega \, r \sin\theta \,\hat{\varphi} \;=\; \sigma_0 \,\omega \,\rho \,\hat{\varphi}$$

- Por outro lado, as cargas que giram pelo círculo de raio $\rho = r \sin\theta = R_0 \sin\theta$ e largura $R_0 \, d\theta$, num período T, resultam numa corrente:

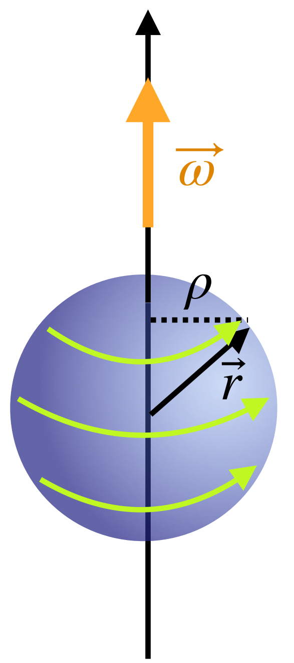
$$dI \;=\; (\sigma_0 \, dA)\frac{1}{T} \;=\; (\sigma_0 \, 2\pi r \sin\theta \, r d\theta)\frac{1}{T} \;=\; \sigma_0 \,\rho \frac{2\pi}{T} r d\theta$$

$$= \; \sigma_0 \,\rho\omega \, r d\theta$$

- Mas isso é justamente a corrente que corresponde a uma densidade superficial de corrente passando por aquela posição:

$$dI \;=\; K \, r d\theta$$

Portanto, está tudo certo: $\vec{K} \;=\; \sigma_0 \,\omega \,\rho \,\hat{\varphi}$, e $dI \;=\; \sigma_0 \,\rho\omega \, r d\theta$



Dipolos magnéticos: exemplos

- Portanto, essa casca esférica que gira pode ser pensada em termos de muitos loops circulares de raio $\rho = r\sin\theta$, cada um com uma área $\pi\rho^2$ e com correntes $dI = \sigma_0\,\rho\omega\,R_0 d\theta = \sigma_0\,\omega\,R_0^2\,\sin\theta\,d\theta$. Os momentos de dipolo são portanto:

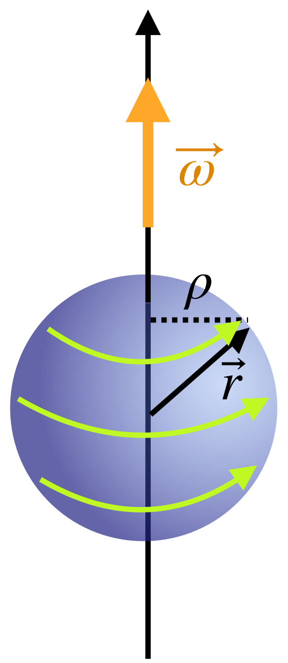
$$d\vec{m} = dI\,(\pi\rho^2)\,\hat{z} = \left(\sigma_0\,\omega\,R_0^2\,\sin\theta\,d\theta\right)\,\left(\pi R_0^2\,\sin^2\theta\right)\,\hat{z}$$

- Portanto, o momento de dipolo magnético total dessa esfera é:

$$\vec{m} = \omega\,\sigma_0\,\pi R_0^4\,\hat{z}\int_0^\pi d\theta\,\sin^3\theta \quad , \qquad \text{e fazendo } \mu = \cos\theta \text{ essa integral fica:}$$

$$= \omega\,\sigma_0\,\pi R_0^4\,\hat{z}\int_{-1}^1 d\mu\,\mu^2$$

$$= \omega\,\sigma_0\,\pi R_0^4\,\hat{z}\,\frac{2}{3}$$



- É sempre útil escrever as grandezas físicas em termos de quantidades "geométricas". Lembrando que a área total da esfera é $4\pi R_0^2$, e que a carga total da esfera é $Q = \sigma_0\,4\pi R_0^2$, temos finalmente a expressão:

$$\vec{m} = \frac{\omega\,Q\,R_0^2}{6}\,\hat{z}$$

- Eu vou deixar como exercício para vocês calcularem o dipolo magnético, o potencial-vetor desse dipolo, e o campo magnético, ***dentro*** da esfera.

Próxima aula:

- A força e o torque do campo magnético
- Campos magnéticos na matéria
- Condições de contorno
- Materiais magnéticos

- Leitura: Griffiths, Cap. 5
- Leitura complementar: Jackson, Cap. 5