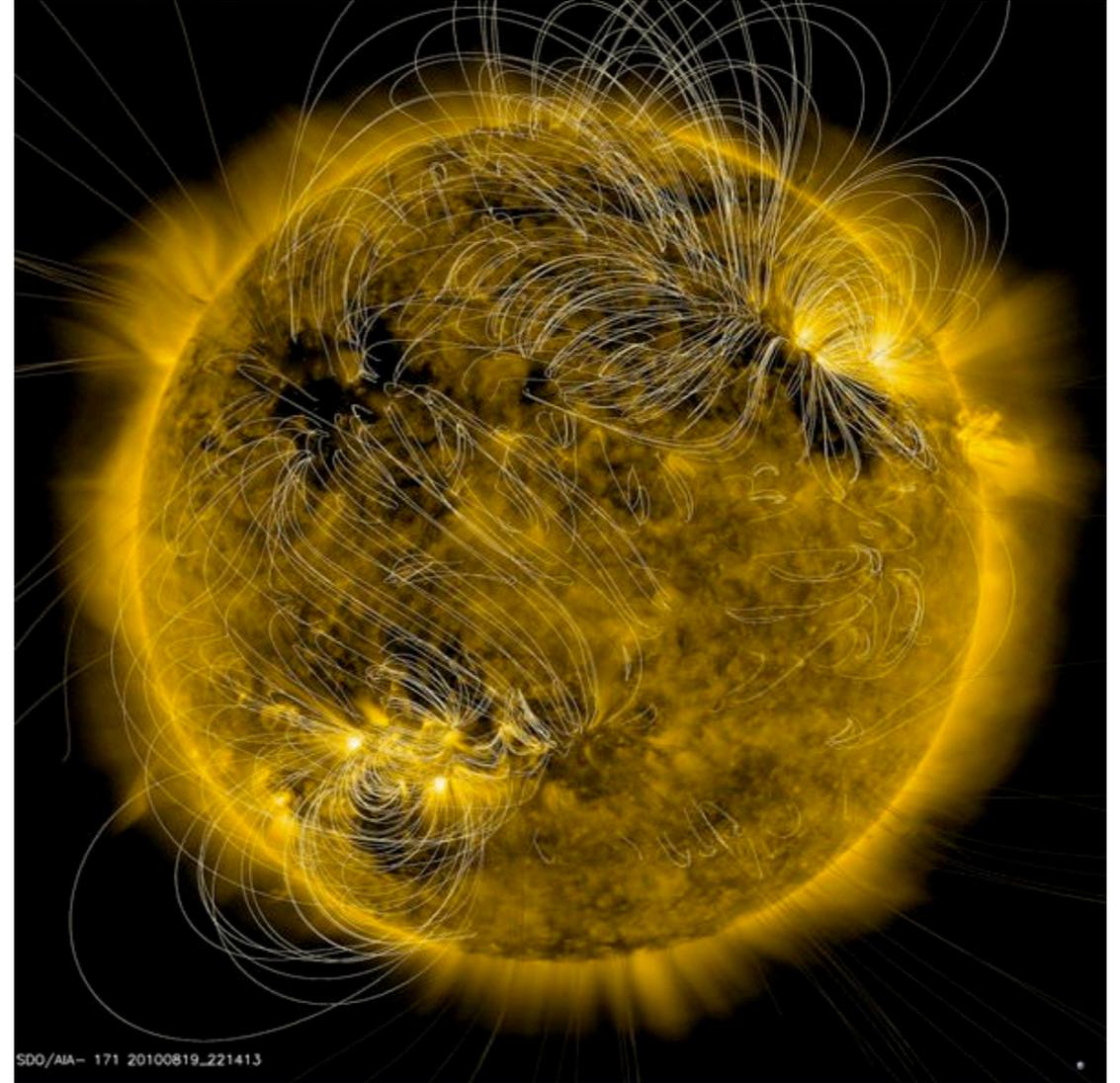
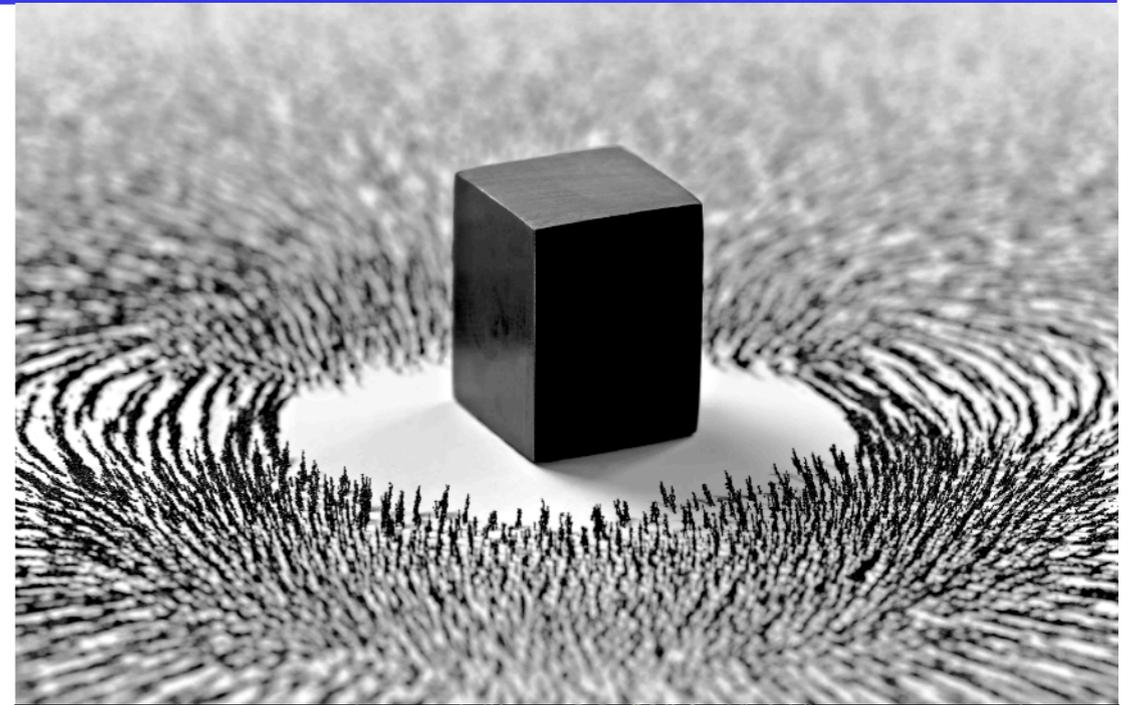


# Magnetostática

- ⚡ O potencial-vetor
- ⚡ Condições de contorno
- ⚡ Exemplos e exercícios



SDO/AIA - 171 20100819\_221413

# Campos magnéticos na natureza

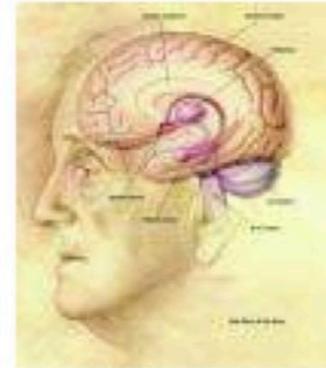
Typical values of  $B$



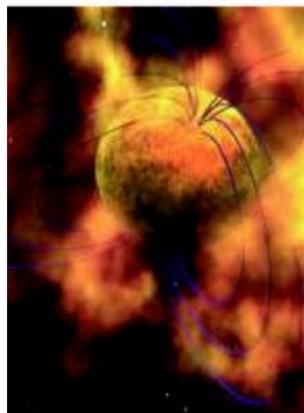
Earth  $50 \mu\text{T}$



Helmholtz coils  $0.01 \text{ T}$



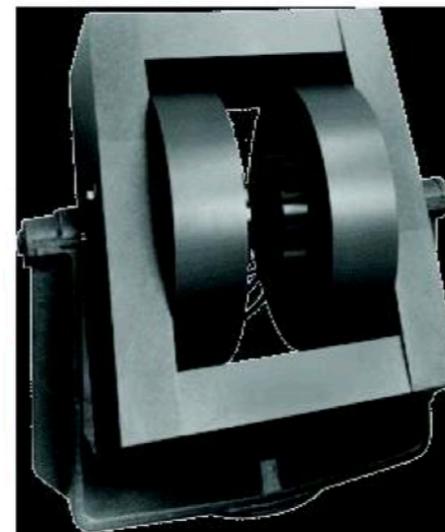
Human brain  $1 \text{ fT}$



Magnetar  $10^{12} \text{ T}$



Permanent magnets  $0.5 \text{ T}$



Electromagnet  $1 \text{ T}$



Superconducting magnet  $10 \text{ T}$

# Magnetostática

- Por enquanto estamos considerando os campos magnéticos gerados por **correntes estacionárias** — ou seja, a **densidade de corrente** é tal que **não há acúmulo de cargas** em nenhum lugar do condutor por onde elas fluem.

- A equação da continuidade nos diz que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e como a **densidade de cargas** é **estática**,  $\partial \rho / \partial t = 0$ , segue que:

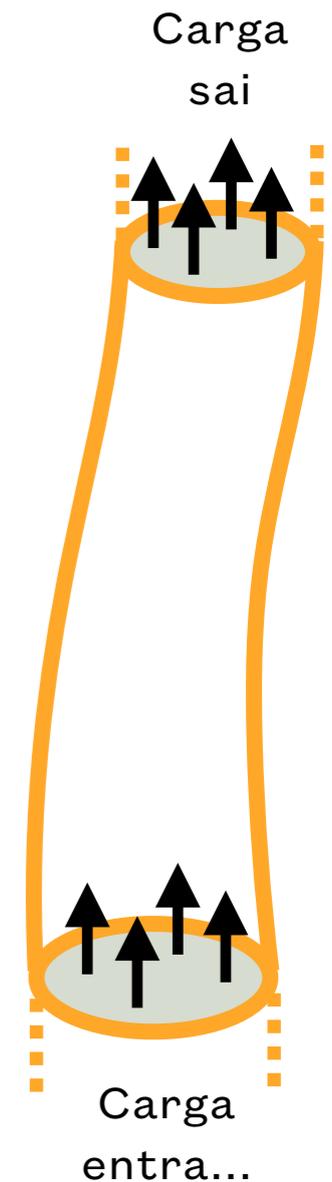
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- Sob essas condições, o campo magnético obedece as leis de Ampère/Biot-Savart, além da “Lei de Gauss” para o magnetismo, que nos diz que não existem fontes “pontuais” do campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- As equações acima são as **Equações de Maxwell para a magnetostática**.



# Magnetostática

- A segunda equação ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ) nos leva naturalmente a expressar o campo magnético em termos de um potencial — o potencial-vetor:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- A **invariância de calibre** do potencial vetor  $\vec{A}$  significa que podemos escolher **qualquer função**  $f$  tal que, por exemplo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = 0 \quad (\text{Essa escolha é o que chamamos de } \mathbf{escolha\ de\ calibre\ de\ Coulomb}.)$$

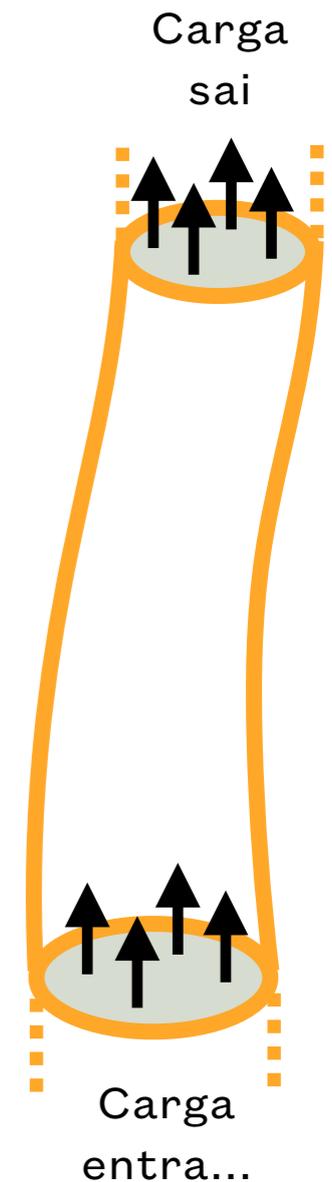
- Com essa escolha, a Lei de Ampère fica na forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

- Em **coordenadas Cartesianas** a solução para **cada componente**,  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ , é exatamente a mesma que encontramos no caso da eletrostática para Equação de Poisson. De fato, a equação acima **é a equação de Poisson**, e sob condições de contorno “normais” temos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$



# Magnetostática

- Podemos finalmente utilizar a expressão acima para encontrar o campo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

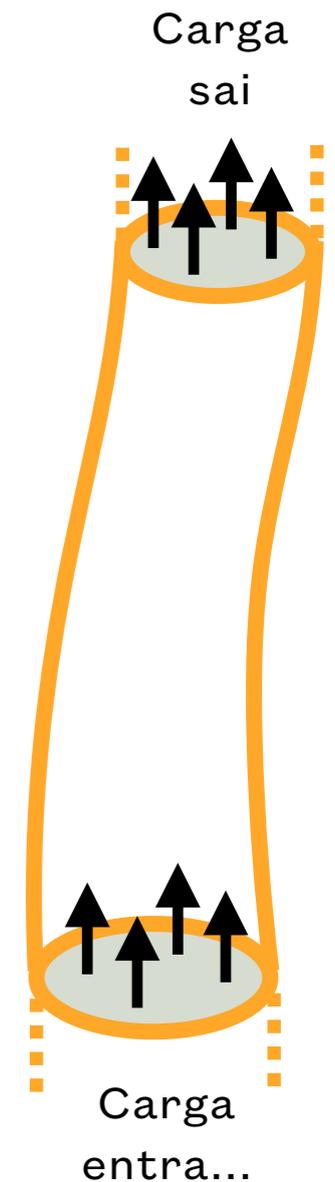
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Aplicando o rotacional na primeira expressão nos leva à solução formal:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) ,$$

e a solução mais familiar da Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l}' \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) .$$



# Condições de contorno da magnetostática

- Agora vamos olhar para as Equações de Maxwell para a magnetostática, e deduzir as **condições de contorno** para o campo magnético e para o potencial-vetor.
- Vamos selecionar um **volume** que atravessa a **interface** entre o vácuo e um material que carrega uma corrente. Como sempre, assumimos que as faces de cima/baixo desse volume tangenciam a interface. Temos então:

$$0 = \int dV \nabla \cdot \vec{B} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

- Desprezando o campo nos lados dessa caixinha (suas áreas são muito pequenas!) obtemos:

$$\Delta B_{\perp} = 0$$

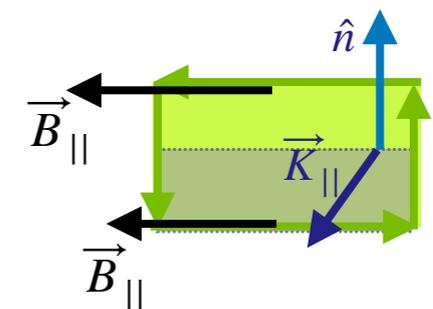
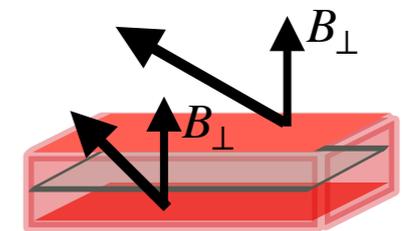
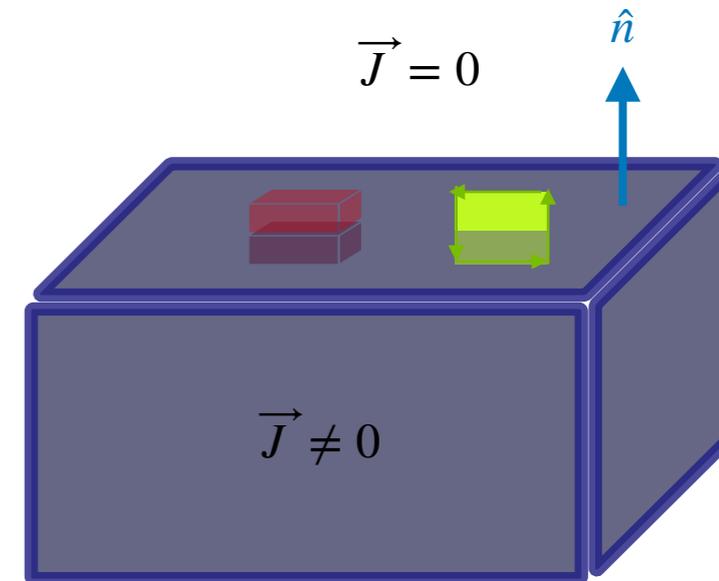
- Por outro lado, se integramos o campo num circuito que cruza essa interface, obtemos:

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \int d\vec{S} \cdot (\mu_0 \vec{J})$$

- O lado esquerdo dessa equação nos dá os campos acima e abaixo da interface; e o lado direito define uma **corrente superficial**. Cancelando o comprimento do circuito na direção paralela temos então:

$$\vec{K}_{||} = \int dn \vec{J}_{||} \quad (\text{Note: componentes orientadas } \mathbf{perpendiculares} \text{ aos lados do circuito})$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}_{||} = \mu_0 \vec{K}_{||} \times \hat{n}, \quad \text{onde } \hat{n} \text{ é a normal à interface (não à superfície definida pelo circuito!)}$$



# Condições de contorno da magnetostática

- A discussão acima significa que o campo magnético obedece as seguintes condições de contorno:

$$\Delta B_{\perp} = 0 \quad , \quad e$$

$$\Delta \vec{B}_{\parallel} = \mu_0 \vec{K}_{\parallel} \times \hat{n} \quad , \quad \text{onde a } \mathbf{corrente\ superficial} \text{ é:}$$

$$\vec{K} = \int dn \vec{J}$$

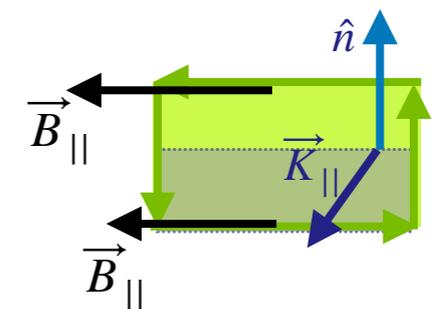
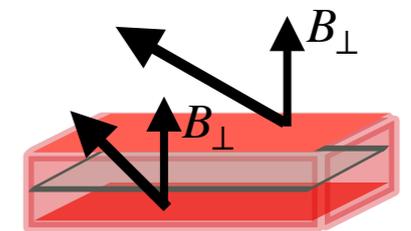
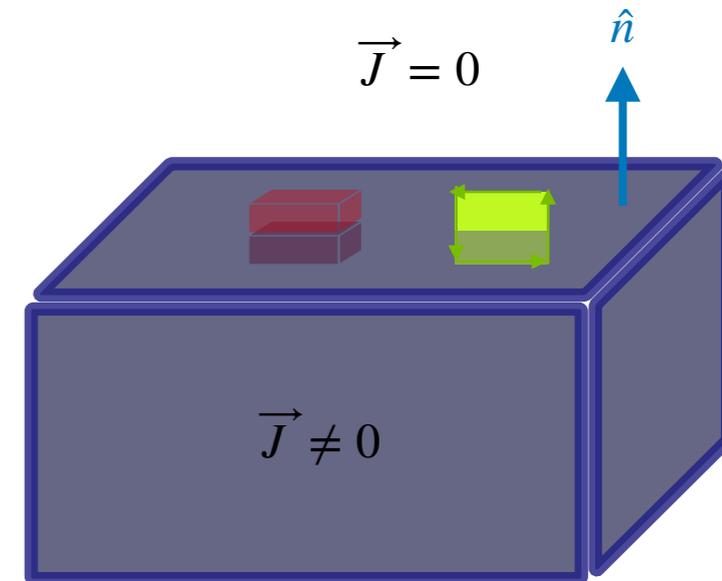
onde  $n$  denota a coordenada normal à interface, e a integral é feita de logo abaixo para logo acima à interface.

- Isso também pode ser expresso em termos do potencial-vetor:

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad , \quad e$$

$$\Delta \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \right) = -\mu_0 \vec{K} \quad ,$$

onde  $n$  é a direção normal à interface.



# Condições de contorno: exemplo

- Vamos considerar uma corrente de superfície no plano  $z = 0$ , dada por:

$$\vec{K} = K_0 \hat{x} \quad , \quad \text{o que significa que a densidade de corrente é:}$$

$$\vec{J} = K_0 \hat{x} \delta(z)$$

- As equações de Maxwell nos dizem que fora desse plano  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  e portanto, no calibre de Coulomb,  $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0$ .
- Portanto, buscamos uma solução da Equação de Laplace,  $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0$ . Vamos tentar uma solução do seguinte tipo:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 Z(z) \quad ,$$

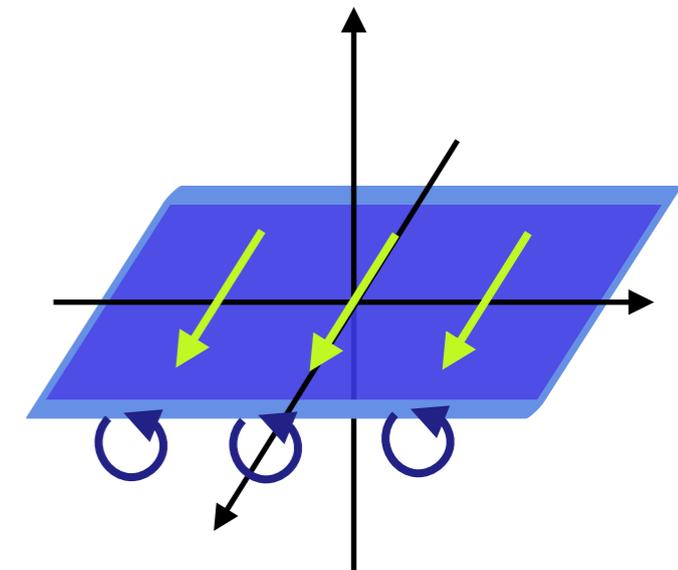
onde não temos dependência nas coordenadas  $x$  e  $y$  devido às simetrias do problema.

- Aplicando a equação de Laplace nesse ansatz leva a:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad Z = \alpha + \beta z$$

- Portanto, com esse ansatz o campo magnético é:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \left[ \vec{A}_0 (\alpha + \beta z) \right] = -\vec{A}_0 \times \vec{\nabla} (\alpha + \beta z) = -\vec{A}_0 \times (\beta \hat{z}) \\ &= -\beta (A_{0,y} \hat{x} - A_{0,x} \hat{y}) \end{aligned}$$



# Condições de contorno: exemplo

- Portanto, segundo o *ansatz* acima temos o campo magnético dado por:

$$\vec{B} = -\beta (A_{0,y} \hat{x} - A_{0,x} \hat{y})$$

- Note (importante!) que, a rigor, temos **duas soluções distintas**: uma em  $z > 0$  e a outra em  $z < 0$  — embora, claro, exista uma simetria entre os dois casos. Isso significa:

$$\vec{B}_{>} = -\beta_{>} (A_{>,y} \hat{x} - A_{>,x} \hat{y}) \quad \text{e}$$

$$\vec{B}_{<} = -\beta_{<} (A_{<,y} \hat{x} - A_{<,x} \hat{y})$$

- Agora, considere as condições de contorno, lembrando que  $K_{||} = K_x = K_0$ , e lembre que  $\hat{n} = \hat{z}$ :

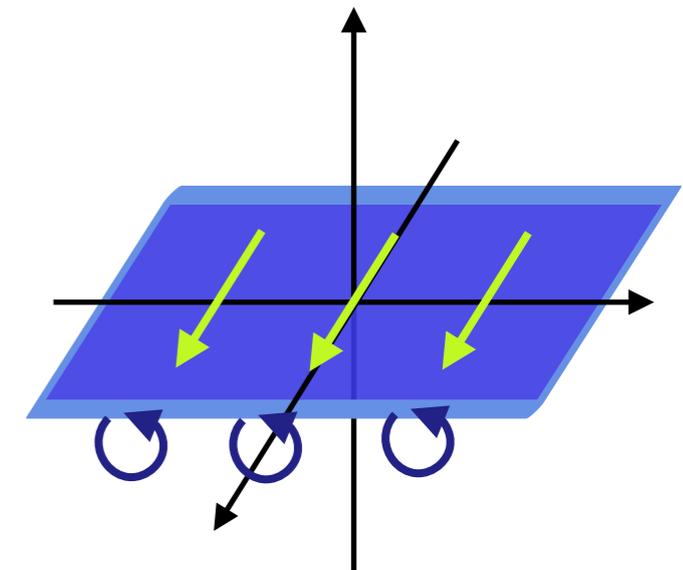
$$\Delta B_{\perp} = \Delta B_z = 0 \quad , \quad \text{e}$$

$$\Delta \vec{B}_{||} = \mu_0 \vec{K}_{||} \times \hat{n} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{B}_y = -\mu_0 K_0 \quad , \quad \Delta \vec{B}_x = 0$$

- Substituindo o *ansatz* temos portanto:

$$\Delta \vec{B}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{>} A_{>,y} = \beta_{<} A_{<,y}$$

$$\Delta \vec{B}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{>} A_{>,x} - \beta_{<} A_{<,x} = -\mu_0 K_0$$



# Condições de contorno: exemplo

- Claramente, o **campo** na direção  $x$  e o potencial-vetor na direção  $y$  não têm fontes, e podem ser tomados como sendo nulos. Sobra apenas a componente do campo na direção  $y$ , ou seja, a componente do potencial-vetor direção  $x$  (a mesma da densidade de corrente). Ou seja:

$$\vec{B}_{>} = \beta_{>} A_{>,x} \hat{y} = B_{>} \hat{y} \quad \text{e}$$

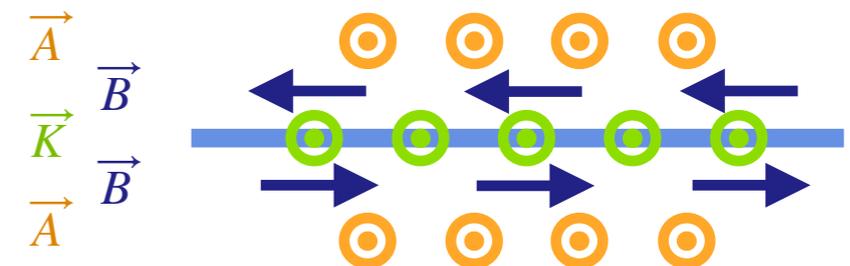
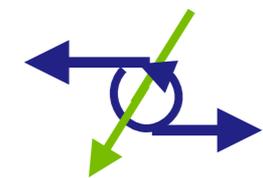
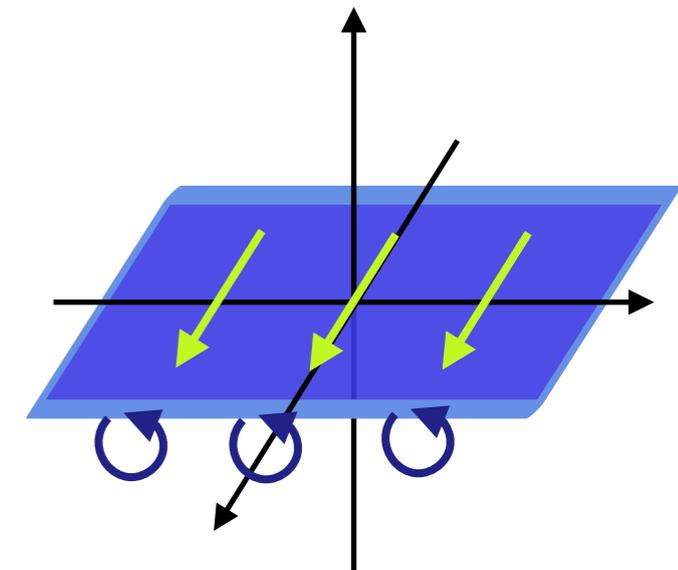
$$\vec{B}_{<} = \beta_{<} A_{<,x} \hat{y} = B_{<} \hat{y} \quad , \text{ com}$$

$$B_{>} - B_{<} = -\mu_0 K_0$$

- Finalmente, considere que o problema tem uma simetria: tanto faz “para cima” ou “para baixo”! Ou seja, em módulo, o campo deve ser igual “em cima” ou “em baixo” — a única diferença é como o campo **circula** em torno da corrente, e a circulação acima ou abaixo do plano se dá em **sentidos opostos**.
- Portanto, com a condição que  $B_{>} = -B_{<} = -\mu_0 K_0/2$ , e assim chegamos no resultado simples (mas trabalhoso!):

$$\vec{B}(z > 0) = -\frac{\mu_0 K_0}{2} \hat{y}$$

$$\vec{B}(z < 0) = +\frac{\mu_0 K_0}{2} \hat{y}$$



# Condições de contorno: exemplo 2

- Considere agora uma corrente superficial no plano  $z = 0$  dada por:

$$\vec{K} = K_0 \hat{x} \cos ky \quad , \quad \text{ou seja, uma densidade de corrente:}$$

$$\vec{J} = K_0 \hat{x} \cos ky \delta(z)$$

- Novamente, queremos resolver para a Eq. de Laplace,  $\nabla^2 \vec{A} = 0$ . Só que agora temos uma dependência com a direção  $y$ , portanto nosso *ansatz* precisa ser algo como:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 Y(y) Z(z) \quad .$$

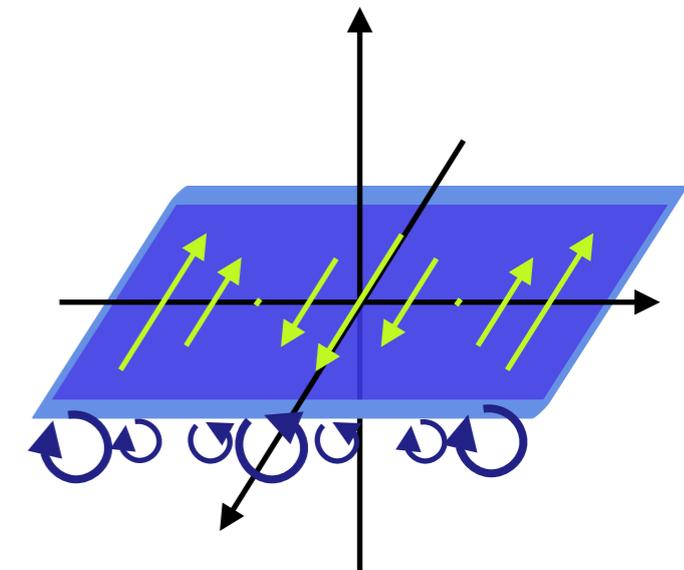
- A Eq. de Laplace com esse *ansatz* leva a uma equação familiar:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2$$

o que leva às soluções:

$$Y = \{\sin \alpha y, \cos \alpha y\} \quad \text{e} \quad Z = \{e^{\alpha z}, e^{-\alpha z}\}$$

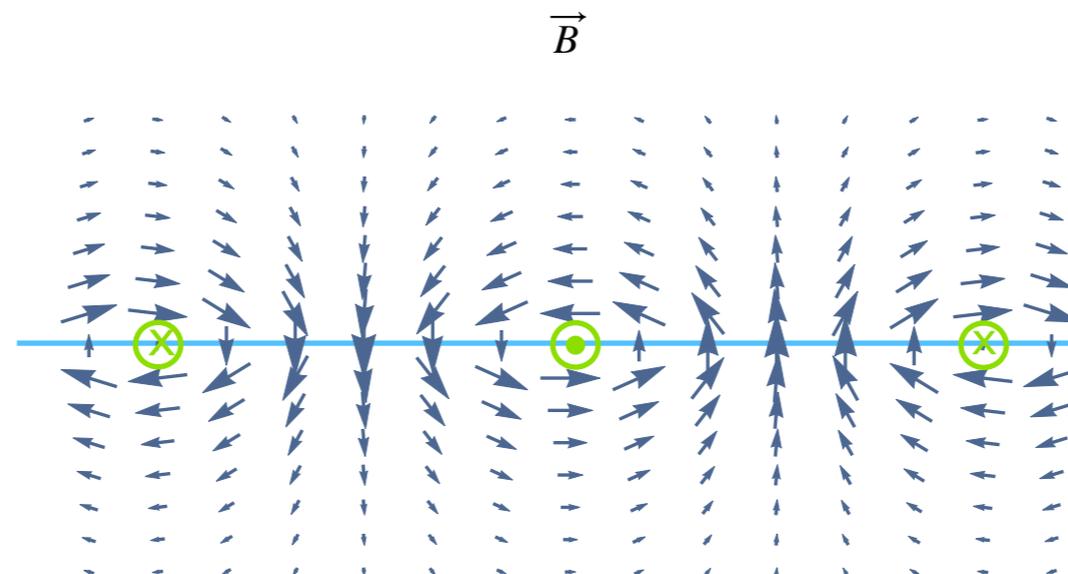
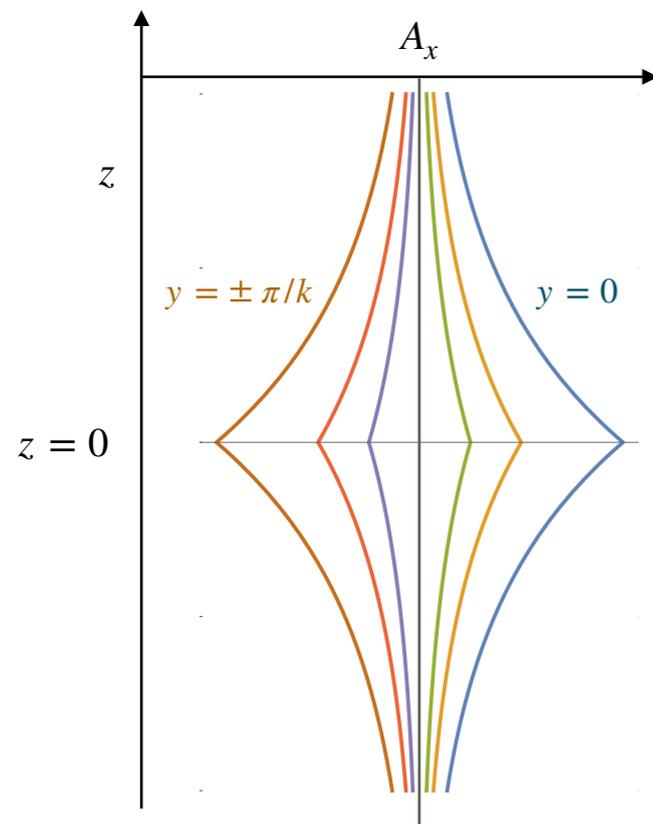
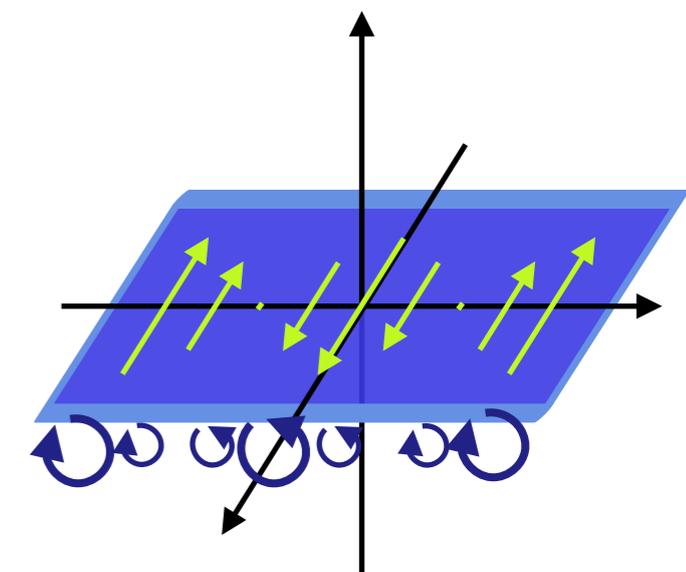
- Observando a fonte do campo magnético, que tem uma dependência do tipo  $\cos(ky)$ , mostra que, claramente, ao impor as condições de contorno será necessário tomar  $\alpha \rightarrow k$ .



# Condições de contorno: exemplo 2

- Agora vamos impor as condições de contorno, mas diretamente no potencial-vetor:  $\vec{A}$  é contínuo em  $z = 0$ , e  $\Delta(d\vec{A}/dz)_{z=0} = -\mu_0 \vec{K}$ .
- Por construção,  $\vec{A}$  é contínuo em  $z = 0$ , pois  $Z(z) \rightarrow e^{\pm kz}$ .
- A segunda condição leva a:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 K_0}{2k} \hat{x} \cos ky e^{\mp kz}, \quad \text{que leva a:} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 K_0}{2} [\mp \hat{y} \cos ky e^{\mp kz} + \hat{z} \sin ky e^{\mp kz}]$$



# Condições de contorno: exemplo 3

- Um exemplo ainda mais simples é o de **dois planos paralelos**, com densidades superficiais de corrente **paralelas** mas em **sentidos opostos**:

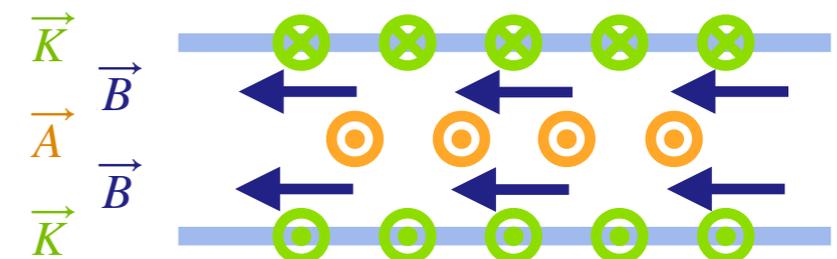
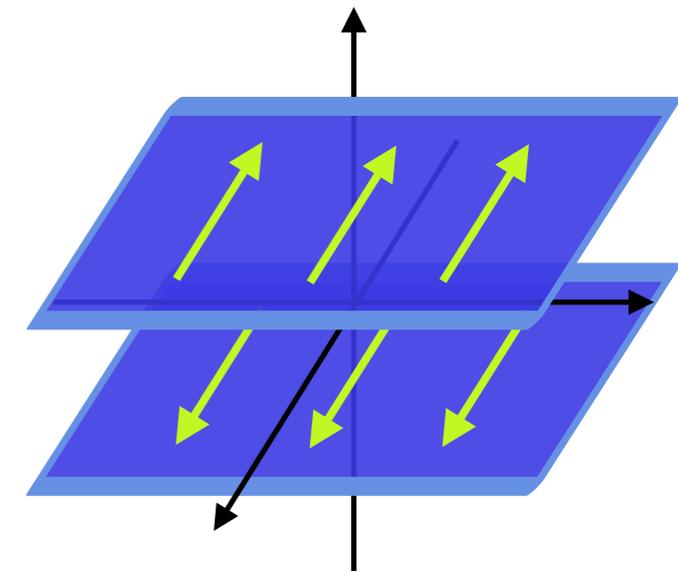
$$\vec{K} = \mp K_0 \hat{x} \quad \text{nos planos de cima (-) e no de baixo (+),}$$

ou seja, uma densidade de corrente:

$$\vec{J} = -K_0 \hat{x} \delta(z - h) + K_0 \hat{x} \delta(z + h)$$

- O campo magnético no espaço entre esses planos é uma extensão trivial dos resultados anteriores:

$$\vec{B} = -\mu_0 K_0 \hat{y}$$



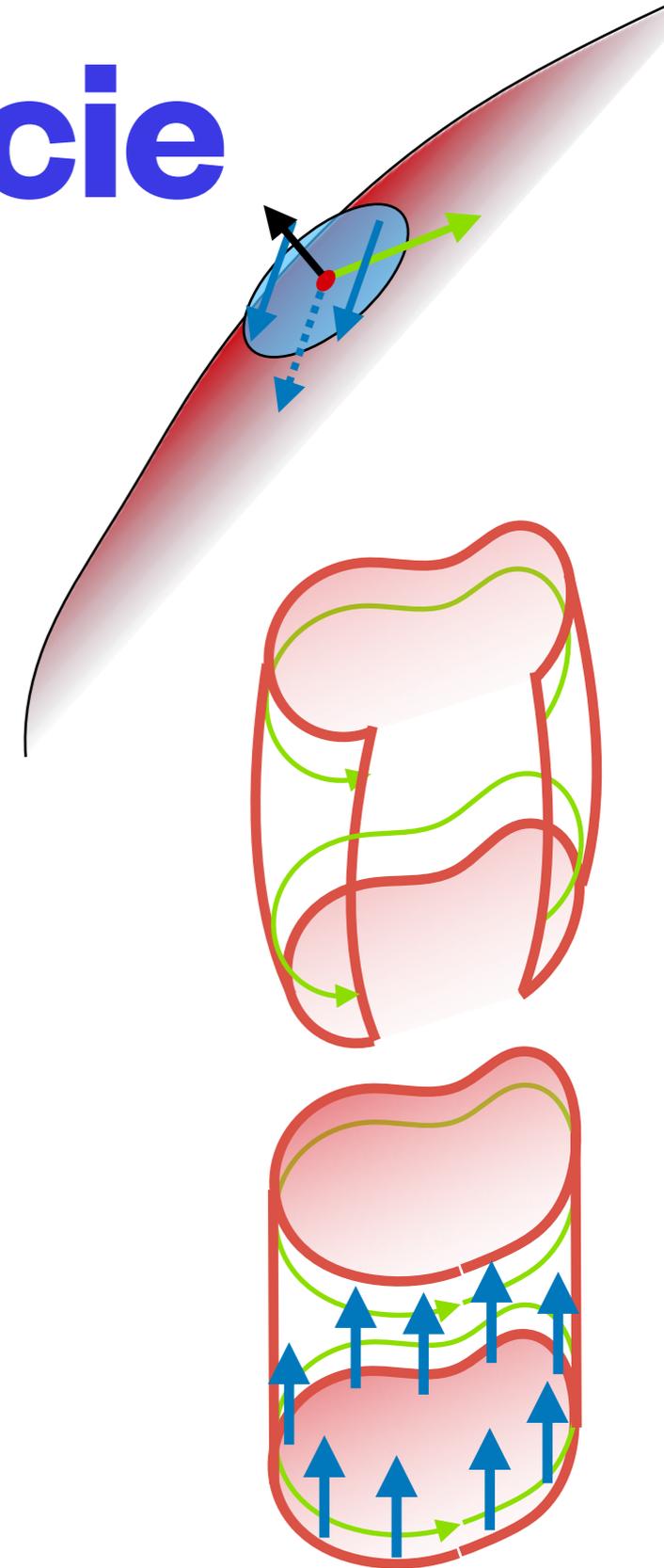
# Correntes de superfície

- Esses resultados indicam que, **logo acima** de uma superfície (de normal  $\hat{n}$ ) que leva uma corrente superficial  $\vec{K}$ , a descontinuidade do campo é dado aproximadamente por:

$$\vec{B}_> - \vec{B}_< \rightarrow \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$$

- Agora imagine que começamos a curvar essa superfície, de modo que a fechamos sobre si mesma, como mostrado na figura — ou seja, fechamos esse “tubo” conectando as linhas da corrente superficial.
- Suponha que somos cuidadosos o suficiente para manter uma das direções paralelas apontando na direção  $z$  — isto é, as seções desse tubo são sempre paralelas ao plano  $x, y$ . Você pode então mostrar que fora do tubo  $\vec{B} \rightarrow 0$ .
- Desse modo, em qualquer seção desse tubo, o campo logo ao lado dessa superfície, na parte de dentro, é  $\vec{B} \rightarrow \mu_0 K_0 \hat{z}$ .
- Finalmente, suponha que esse tubo é infinito, de modo que o campo magnético em toda a superfície desse tubo (ou seja, no contorno do tubo) é dada por  $\vec{B} \rightarrow \mu_0 K_0 \hat{z}$ . O que isso significa para o campo dentro do tubo?
- Evidentemente, isso significa que o campo tem que ser  $\vec{B} = \mu_0 K_0 \hat{z}$  em todo o espaço dentro desse tubo!! Lembre-se: o campo magnético dentro do tubo obedece  $\nabla^2 \vec{B} = 0$ , e nós sabemos que, como as condições de contorno se propagam para dentro do volume desde o contorno — lembre-se do método do relaxamento.
- Portanto, essa construção significa que, para um tubo qualquer, de qualquer seção reta, se a densidade de corrente é constante, então o campo magnético dentro desse tubo é  $\vec{B} = \mu_0 K_0 \hat{z}$ .
- Um corolário desse resultado é que o campo magnético dentro de um solenóide é dado por:

$$\vec{B} = \mu_0 K_0 \hat{z} \quad , \quad \text{com } K_0 = \frac{NI}{L} \text{ , onde temos } N \text{ loops de um fio, } I \text{ é a corrente, e } L \text{ é o comprimento.}$$



# Outro exemplo simples

- Vamos agora construir mais uma daquelas soluções tipo “tijolinhos”, que podemos utilizar para construir outras soluções. Vamos pensar em um segmento de um fio de comprimento  $L$ , que carrega uma corrente  $I$ , orientado na direção  $z$ .
- Ok, mas tem algo esquisito aqui... para onde vai essa corrente? É como se ela fosse “criada” na ponta de baixo ( $z = -L/2$ ), e destruída na ponta de cima ( $z = L/2$ ). Então, não pode ser verdade que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  em todo o espaço, certo?...
- Mesmo assim, podemos resolver esse problema definindo a densidade de corrente:

$$\vec{J} dV = I dz \hat{z} \quad \text{para} \quad -L/2 \leq z \leq L/2.$$

- Portanto, temos o potencial-vetor:

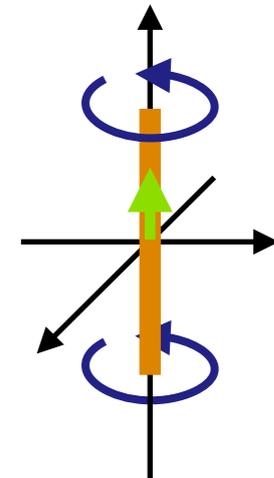
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{I \hat{z}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}$$

- A integral acima é basicamente um logaritmo:  $\int dx (a + x^2)^{-1/2} = \log(x + \sqrt{a + x^2})$ . Portanto:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[ \frac{z + L/2 + \sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}}{z - L/2 + \sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right] \hat{z}, \quad \text{que leva a:}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{z + L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right] \hat{\varphi}$$

- Note que no limite  $L \rightarrow \infty$  voltamos ao resultado para um fio infinito,  $\vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\varphi}$ .



# Outro exemplo simples

- Esse “tijolinho” pode ser usado para construir muitas outras configurações. Considere, por exemplo, o campo magnético ao longo do eixo central de um loop de corrente (na figura, o eixo  $z$ ).
- Uma aplicação simples da lei de Biot-Savart mostra que, ao longo do eixo  $z$ , temos:

$$\vec{B}(\rho = 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{e portanto} \quad \vec{B}(\rho = 0, z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R}$$

- Poderíamos também considerar que esse loop é feito de muitos segmentos retos de comprimentos  $\Delta L$ , conectados um ao outro, de tal forma que o comprimento total de todos os segmentos é  $\sum \Delta L = 2\pi R$ .
- Vamos agora colocar os segmentos no plano  $\{x, y\}$  ao longo do círculo de raio  $R$ , de forma que a corrente flua na direção anti-horária. Um segmento individual gera um campo, no centro do loop, que aponta na direção  $+z$ , com intensidade:

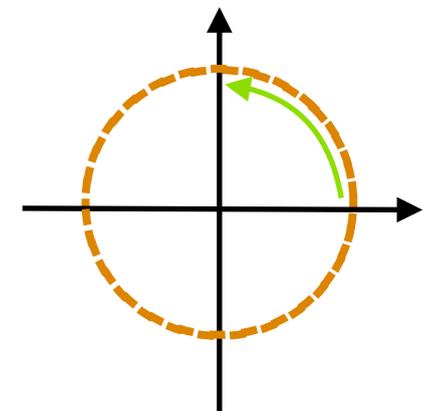
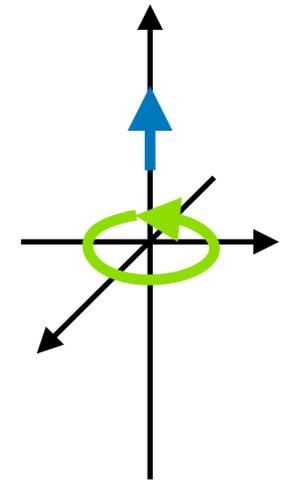
$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \frac{\Delta L}{\sqrt{R^2 + (\Delta L/2)^2}}$$

- Vamos agora tomar  $\Delta L \rightarrow 0$ , ao mesmo tempo em que aumentamos o número de segmentos, e vamos somar a contribuição de todos eles. Temos assim:

$$B = \sum \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sum \frac{\Delta L}{\sqrt{R^2 + (\Delta L/2)^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \frac{\sum \Delta L}{\sqrt{R^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R}$$

que é, de fato, o resultado esperado !!

- Eu vou deixar como um exercício para vocês mostrarem que o resultado para qualquer posição ao longo do eixo  $z$  pode ser obtido do mesmo modo (se você quiser, pode também ver a solução no livro do Jackson). A vantagem é que, agora, podemos construir o campo magnético de **qualquer loop fechado**, feito de segmentos finitos ou infinitesimais !!



---

# Próxima aula:

- Expansão multipolar na magnetostática
- Dipolos magnéticos
  
- Leitura: Griffiths, Cap. 5
- Leitura complementar: Jackson, Cap. 5