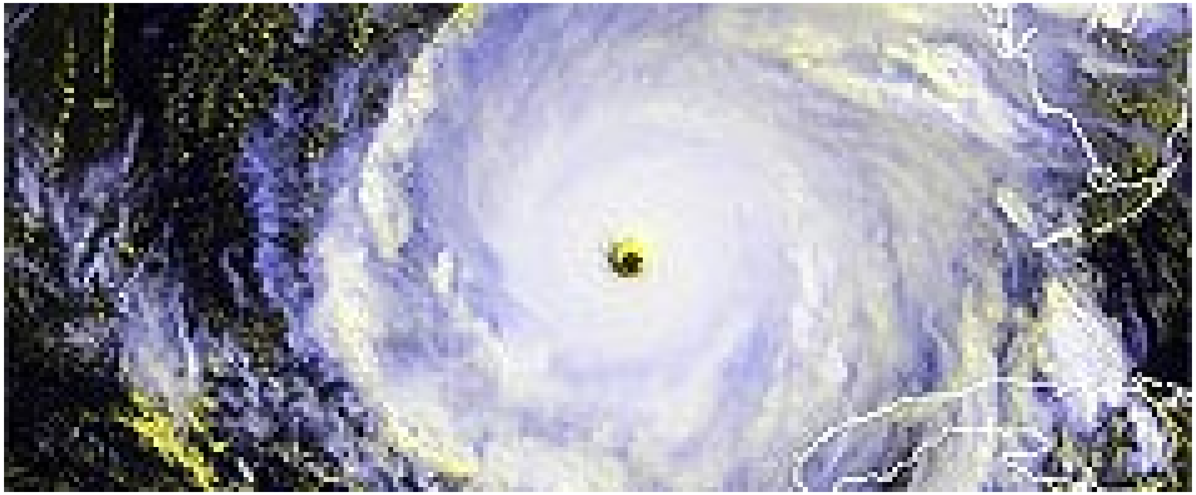
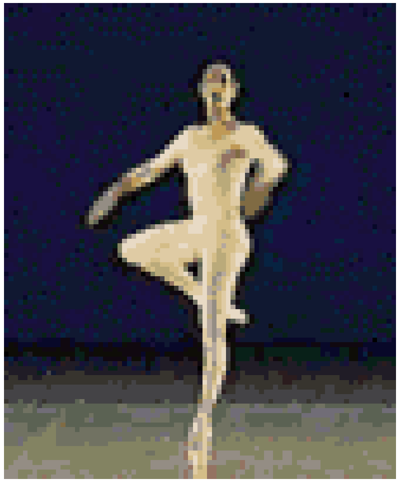
2ª Aula do cap. 11

- **Quantidade de Movimento Angular "L".**
- **Conservação do Momento Angular: $L_i = L_f$**





Referência:

Halliday, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, vol.. 1 cap. 11 da 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC.

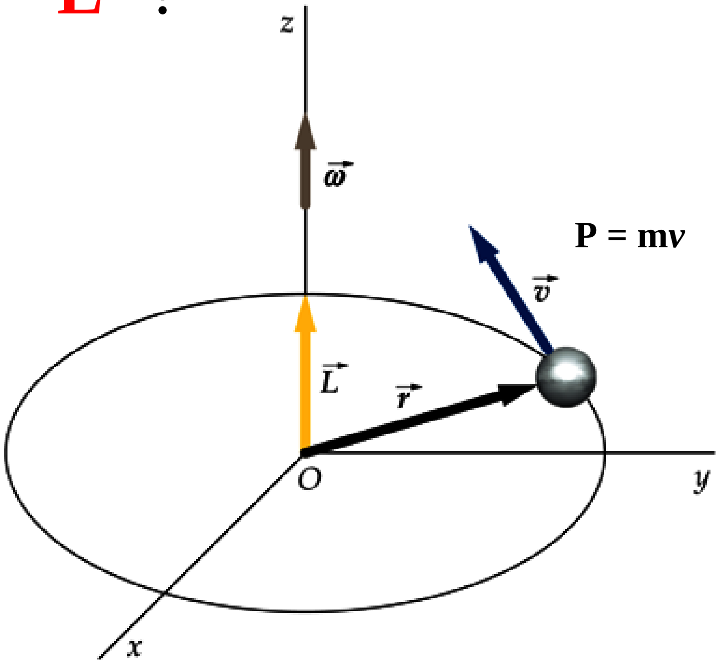
O momento angular

As variáveis angulares de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo têm sempre correspondentes lineares

$$\vec{\tau} \leftrightarrow \vec{F}\,;\ \vec{\alpha} \leftrightarrow \vec{a} \ \ e \ \ I \leftrightarrow M$$

•Vamos definir mais uma grandeza angular que nos será extremamente útil; o momento angular **“L”** !

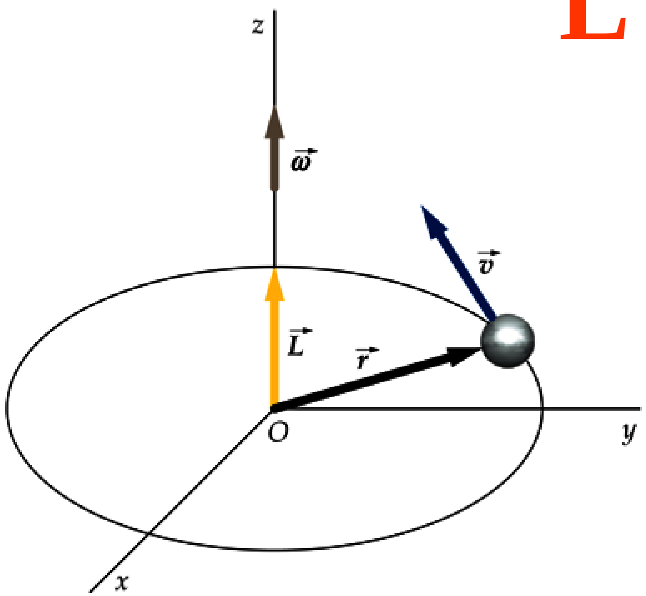
•O momento angular de uma partícula depende do seu momento linear

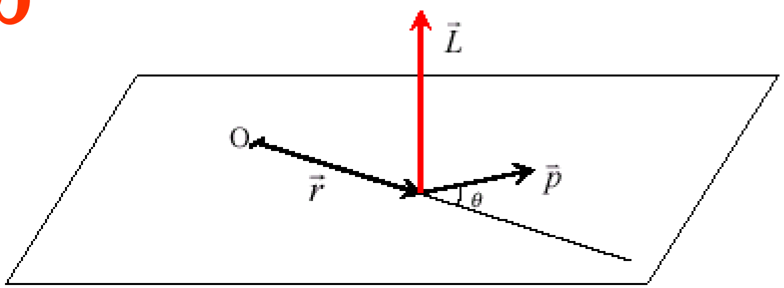


O momento angular

•**De modo similar ao momento linear (p = m v) os movimentos rotacionais possuem um momento angular L, que para um corpo em rotação em torno de um eixo fixo é definido por:**

$$L = I\,\omega$$





Onde, **I** é o momento de inércia e **ω** a velocidade angular.

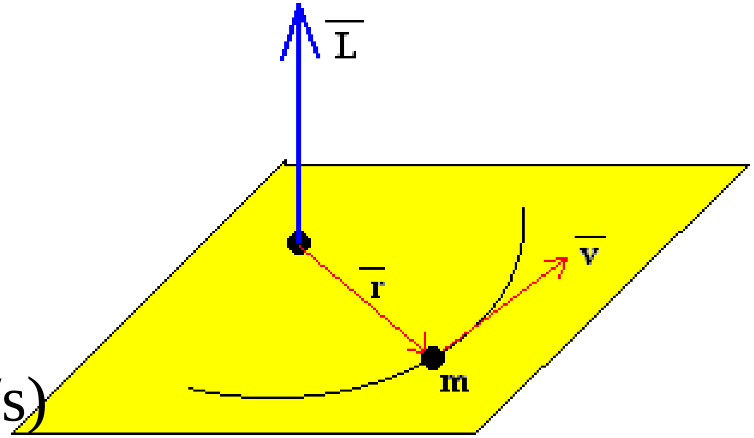
O momento angular da partícula na figura é um vetor perpendicular ao plano do movimento e o seu módulo vale **I ω.**

O momento angular

- **De outro maneira o momento angular L, pode ser definido por:**

$$\mathbf{L = I\,\omega = mr^2\,(v/r) = mrv = r \times (mv) = produto\ vetorial.}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$



- Onde o sinal *x* designa *produto vetorial*

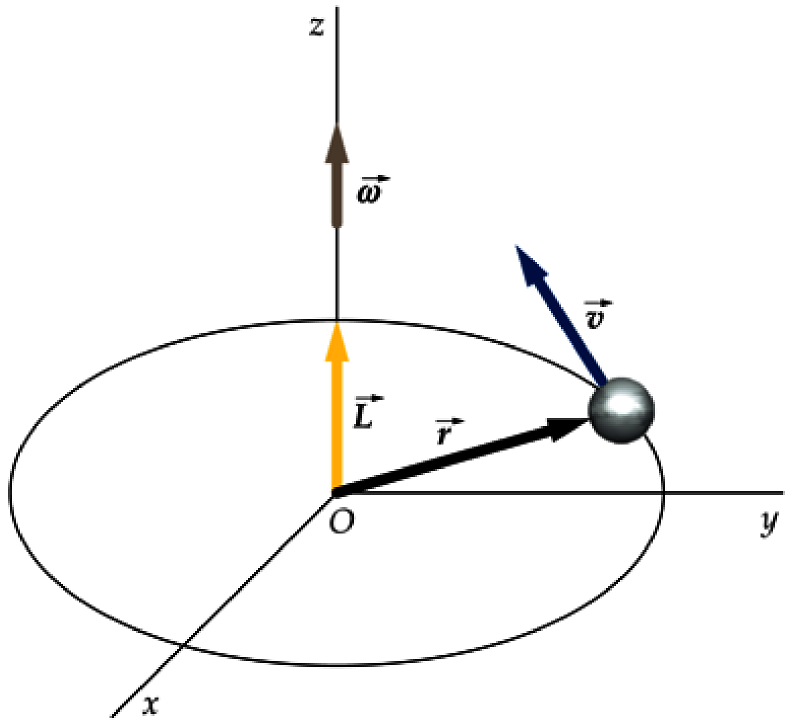
No SI a unidade de momento angular

é o "***joule segundo***" (J s) ou $L = kg\ m^2/s$)

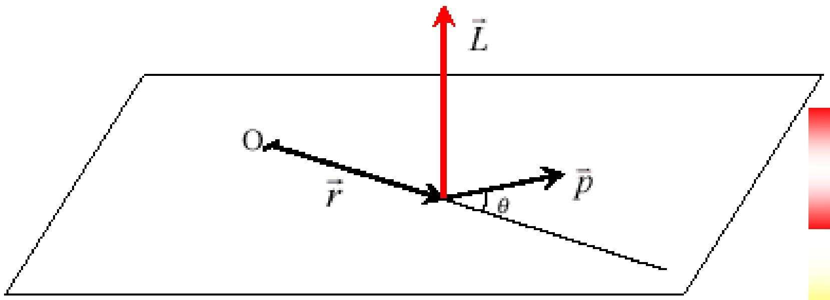
- $W = F.d$ > joule $= kg\ m/s^2.\ m$ e

Momento angular $= kg\ m/s^2.\ m\ (s)$ = $\mathbf{L = kg\ m^2/s = J.s}$

O momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$



Isto é, L um vetor cuja módulo é o produto da grandeza do momento linear "p", pela distância à origem "*r*", multiplicados, ainda pelo seno do ângulo que p= mv e *r* fazem entre si.



$$L = |r|\,|p|\,\text{sen}\,\theta$$

$$L = r\,mv$$

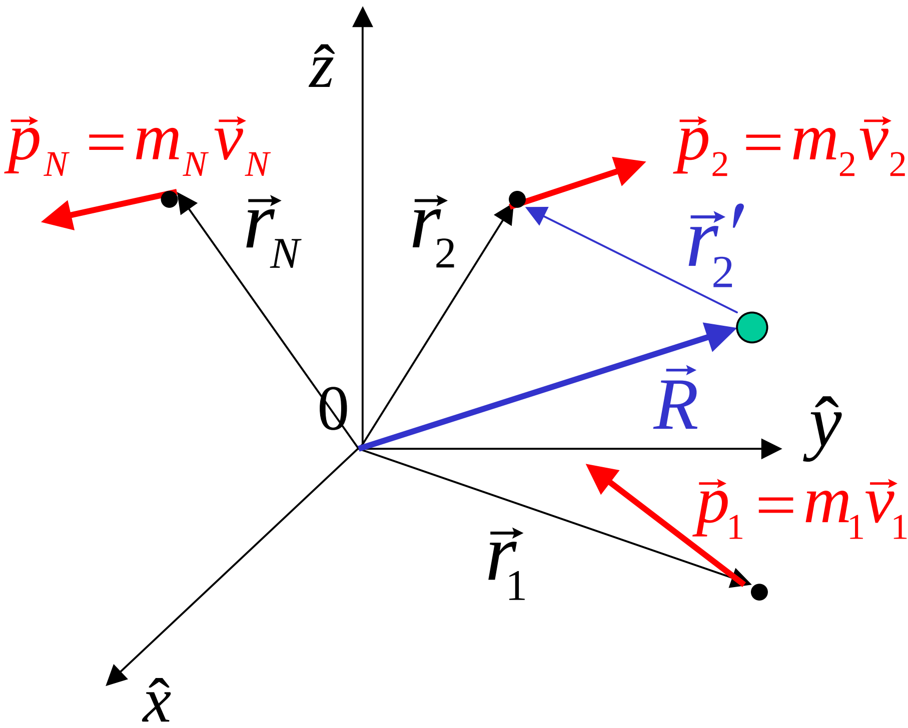
O momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de um sistema de partículas é dado por

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Lembrando que a posição do CM é

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{R} = 0$$



O momento angular do sistema de partículas é a soma do momento angular interno (L') (relativo ao CM) com o momento angular do CM.

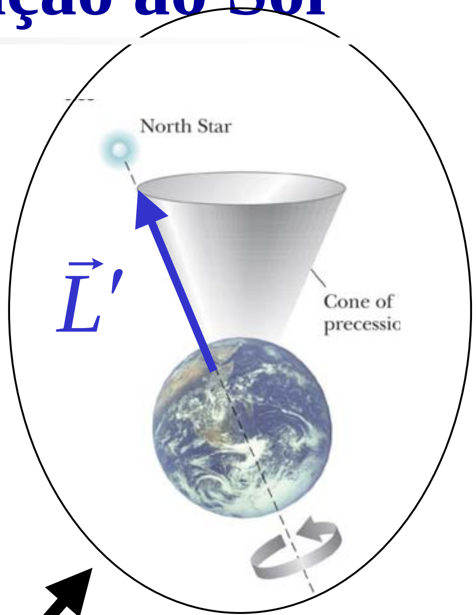
$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P}$$

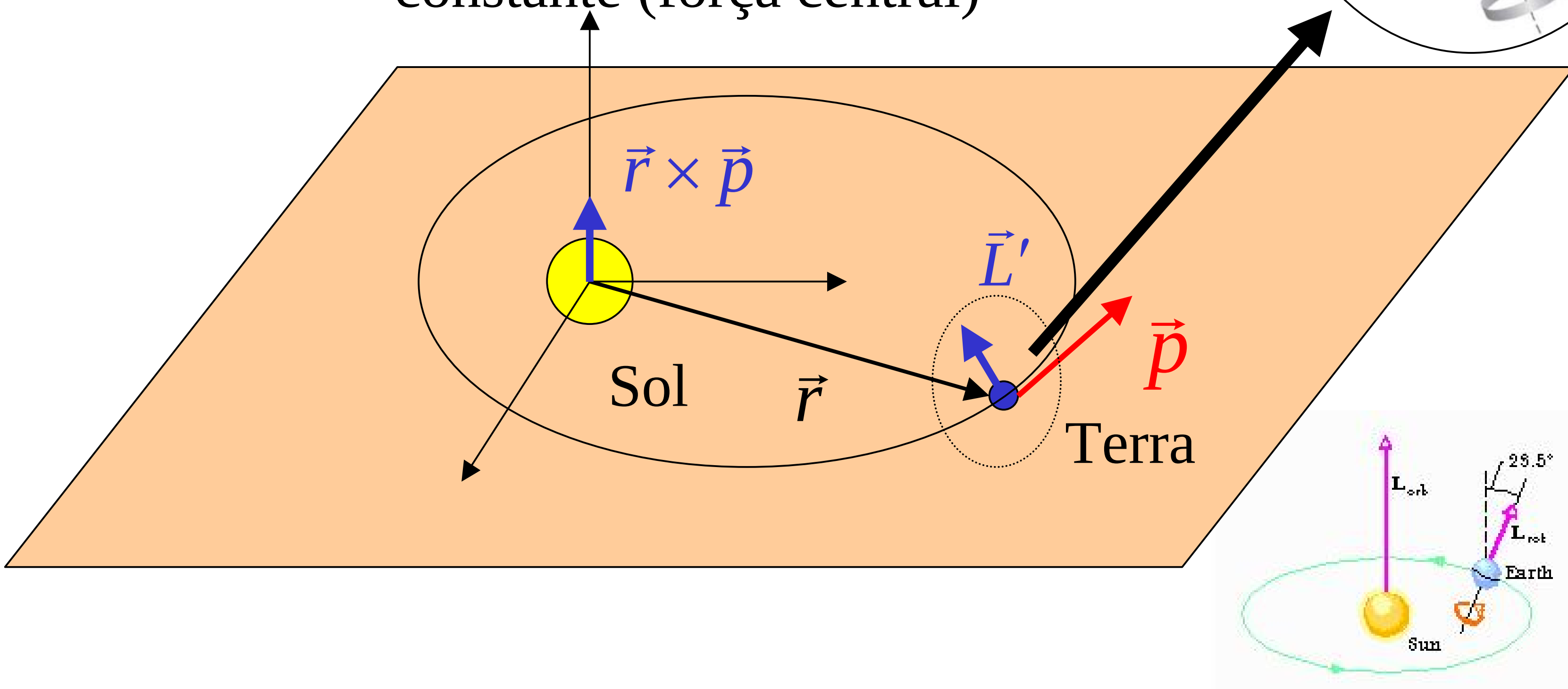
Momento angular da Terra em relação ao Sol

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L}'$ → Momento angular da Terra em torno do seu próprio eixo

$\vec{r} \times \vec{p}$ → Momento angular de translação = constante (força central)

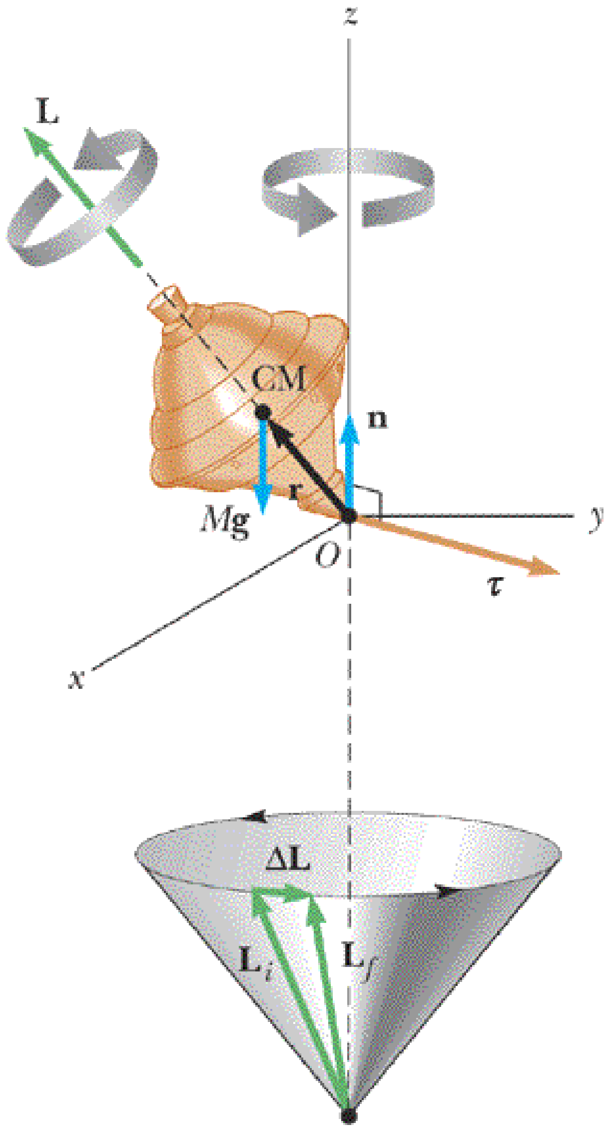




Ampliando a definição de Momento Angular

$dL/dt = \tau$ torque

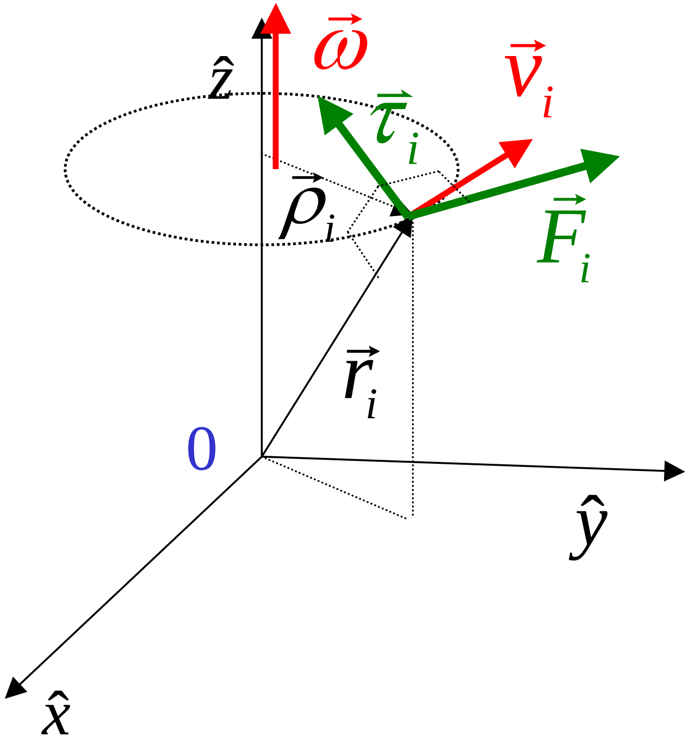
•Taxa de variação do momento angular com o tempo é igual ao torque resultante que atua na partícula.



Ampliando a definição de Momento Angular

- **Torque com relação à origem "0" do sistema de coordenadas.**

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



Por outro lado $\vec{F}_i = \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$ onde

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ **é o momento linear da partícula**

Então

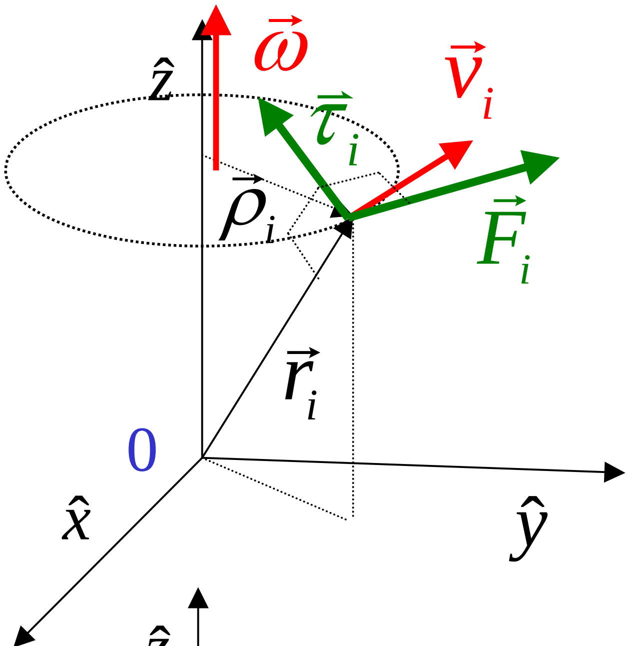
$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \frac{d\,\vec{p}_i}{dt} = \longrightarrow \ ?$$

Ampliando a definição de Momento Angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)}{dt}=\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

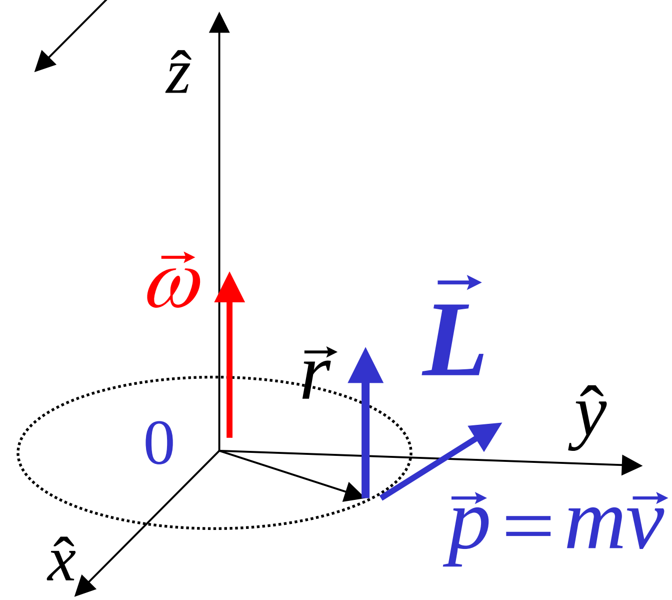
v x mv

0



Conservação do momento angular...

$$\vec{\tau}_{resext}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{L}}{dt}$$



podemos imediatamente dizer que

$$\vec{\tau}_{resext}=0\ \Rightarrow\ \vec{L}=const.$$

Princípio de conservação do momento angular

$dL/dt = \tau \quad = d\,(I\,\omega)\,/dt = I\,d\,(\omega) = I\,\alpha$

- $\tau = I\,\alpha =$ torque resultante externo

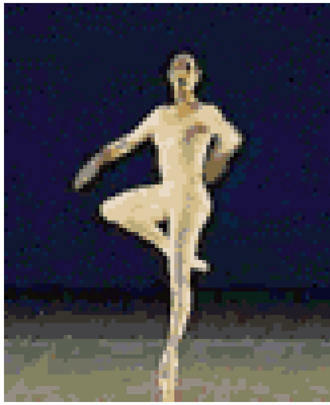
$\tau_{Res.externo} = 0 \qquad dL/dt = 0$

$L =$ constante

$$L_i = L_F$$

Princípio de conservação do momento angular

Brasileira
Mayra Ramos, ganhou
a medalha de bronze na
patinação artística PAN.



$L_i = L_F$

$I = mR^2 \longrightarrow -$ $\qquad$ $\omega \longrightarrow +$

O momento de inércia I diminui, e a velocidade angular ω aumenta.

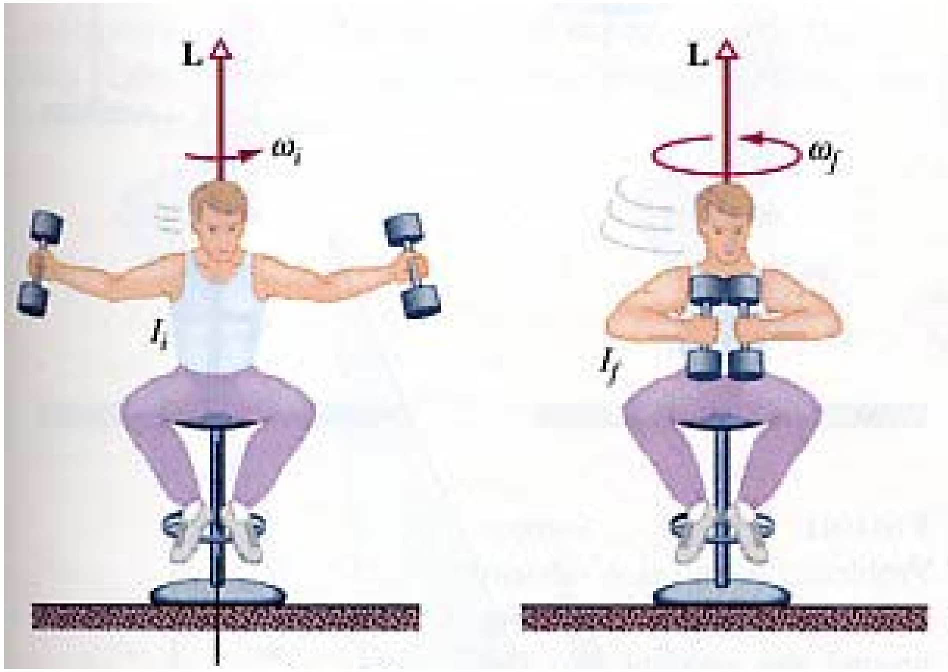
$$L = I\omega = const. \quad \Rightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Princípio de conservação do momento angular

No sistema homem - halteres só há forças internas e, portanto,

$\tau_{Res.externo} = 0$ $\quad L = I\omega = const. \quad \Rightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f$

$\omega_i \; I_i$

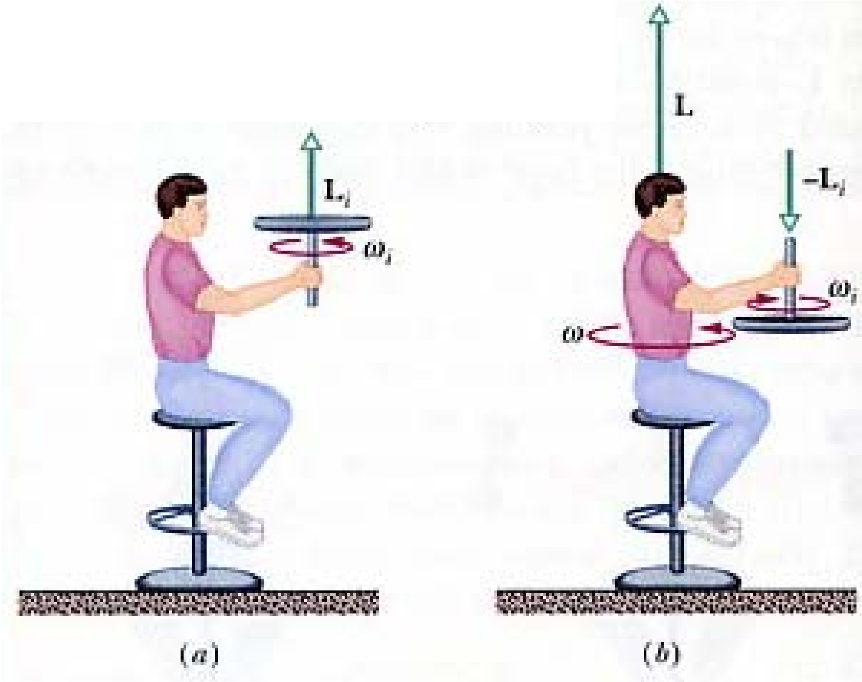


$I_f\omega_f$

Conservação do momento angular ...

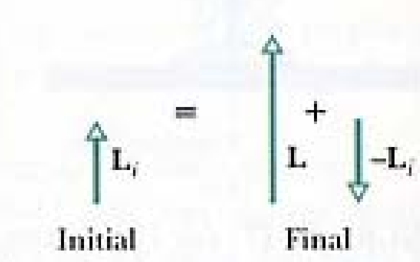
Dados $I_{bic} = 1{,}2\,kg.m^2;\ I_{tot} = 6{,}8\,kg.m^2\ \ e\ \omega_i = 3{,}9\,rot/s$

Queremos calcular a velocidade angular final do sistema após o menino inverter o eixo de rotação da roda de bicicleta (ver figura)



Momento angular inicial do sistema roda de bicicleta – menino (+ banco)

$$L_i = L_{bic} = I_{bic}\omega_i$$



Menino inverte o eixo de rotação da roda de bicicleta

$$L_{bic} \rightarrow -L_i$$

Conservação do momento angular ...

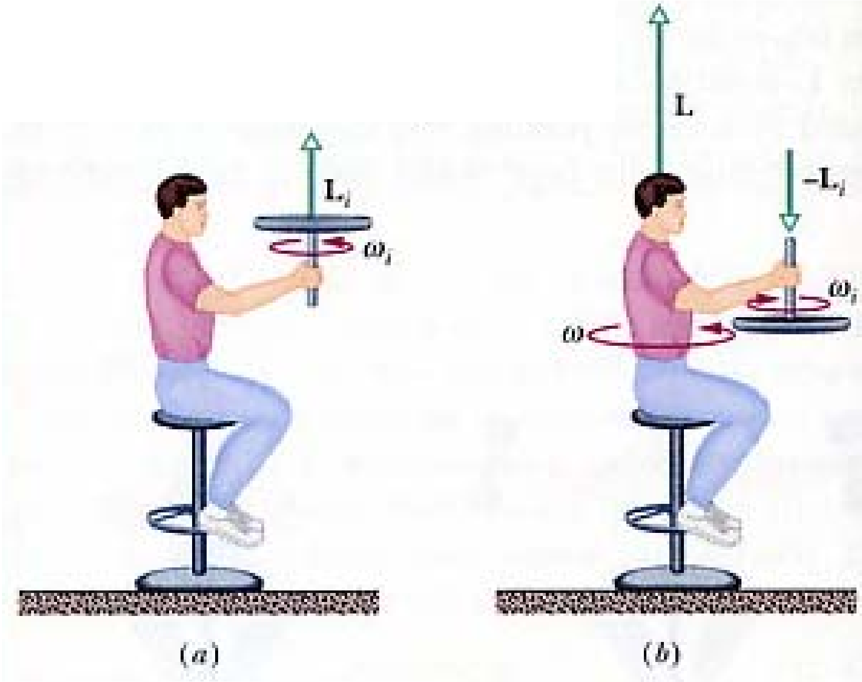
$$L_f = L_{bic} + L_{men} = L_{men} - L_i$$

Conservação do momento angular
pois só há forças internas no sistema

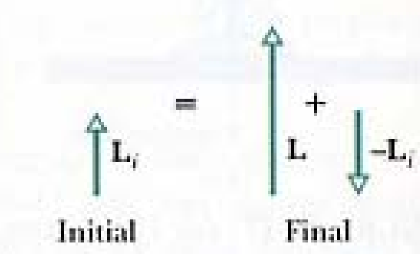
$$L_f = L_i \Rightarrow L_{men} - L_i = L_i$$

$$\Rightarrow L_{men} = 2L_i$$

$$\Rightarrow \quad I_{tot}\omega = 2I\omega_i$$



$$\omega = \frac{2I\omega_i}{I_{tot}} = 1{,}4\, rot/s$$



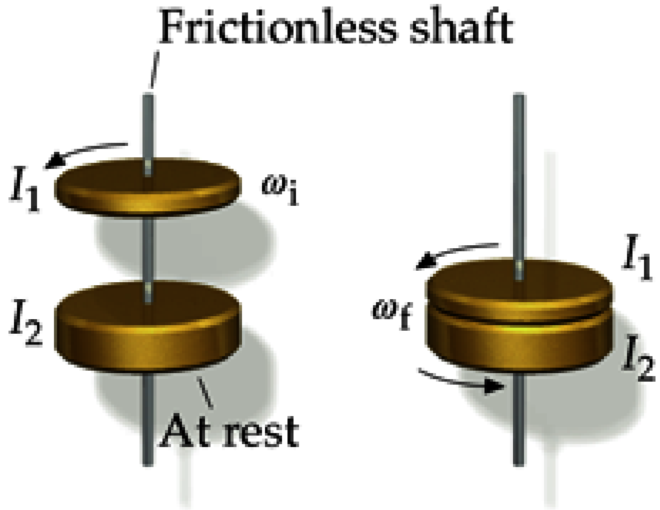
http://www.usd.edu/phys/courses/phys211/notes/videos/flip.html

Rotação em torno de um eixo fixo

Tabela de equivalências

	Rotational Motion About a Fixed Axis	Translational Motion
Kinetic energy	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Equilibrium	$\sum \tau = 0$	$\sum \mathbf{F} = 0$
Newton's second law	$\sum \tau = I\alpha$	$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Newton's second law	$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$
Momentum	$L = I\omega$	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
Conservation principle	$L_i = L_f$	$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$
Power	$\mathcal{P} = \tau\omega$	$\mathcal{P} = Fv$

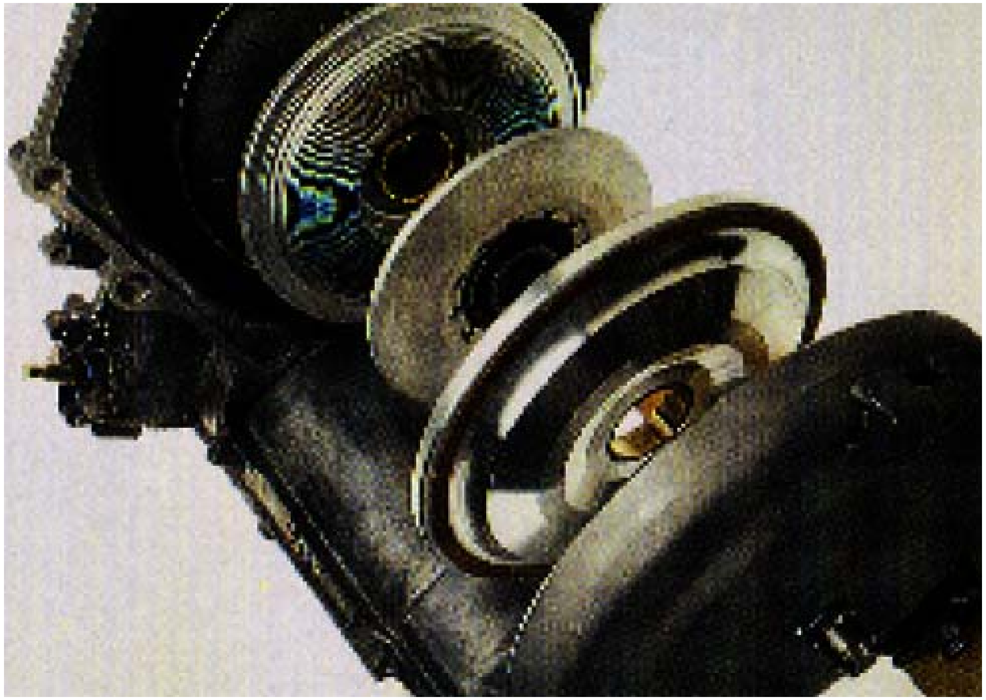
Aplicações



$$L_f = L_i$$

$$(I_1 + I_2)\omega_f = I_1\omega_i$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$



Os pratos de uma transmissão de motor de caminhão fazendo colisões inelásticas uns com os outros nas mudanças de marcha.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I}$$

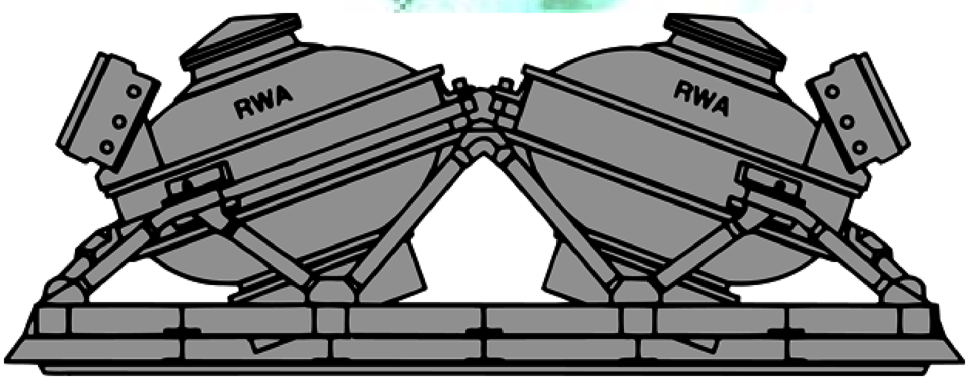
$$K = \frac{L^2}{2I}$$

$$K_i = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

Kf < Ki

$$K_f = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

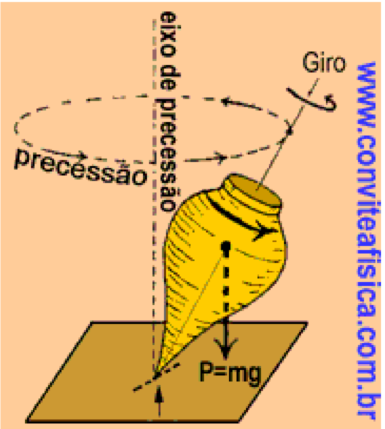
O telescópio espacial ***Hubble***

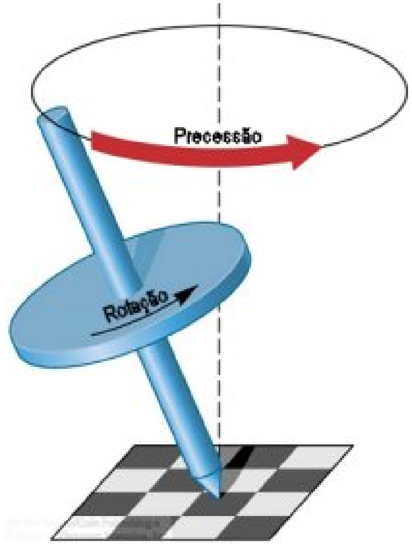


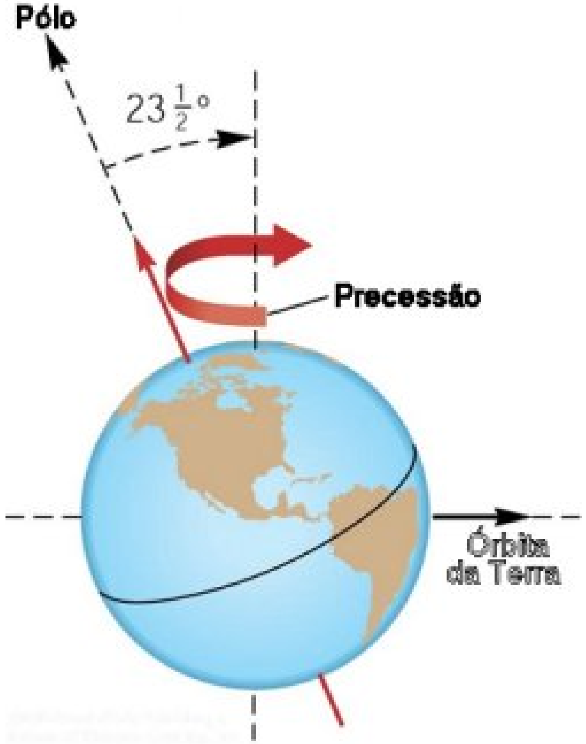
Rotação de dois volantes, que giram em torno de eixos não-coincidentes.

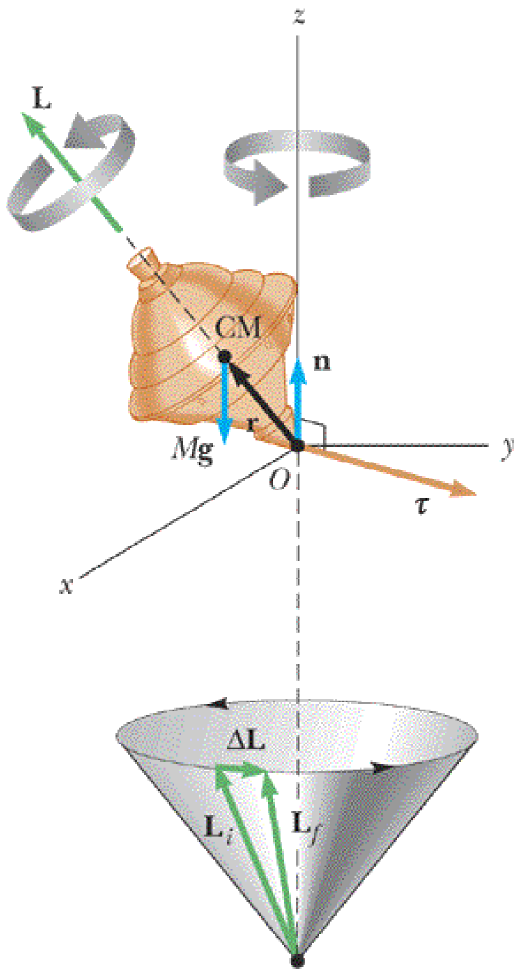
- O telescópio espacial ***Hubble*** é orientado pelo ajustamento da rotação de dois volantes, cada qual de 45 kg, que giram em torno de eixos não-coincidentes com velocidades de até 3000 rpm. Modificações das velocidades de rotação, controladas por programas de computador, provocam momentos angulares que levam a lentas e precisas alterações da orientação do aparelho. Este mecanismo de orientação atinge e mantém a visada de um alvo com aproximação da ordem de 0,005 segundo de arco, equivalente, aproximadamente, a se manter iluminada uma pequena moeda em Porto Alegre/RS, pela luz de um lanterna situada na cidade Curitiba.

Aplicações

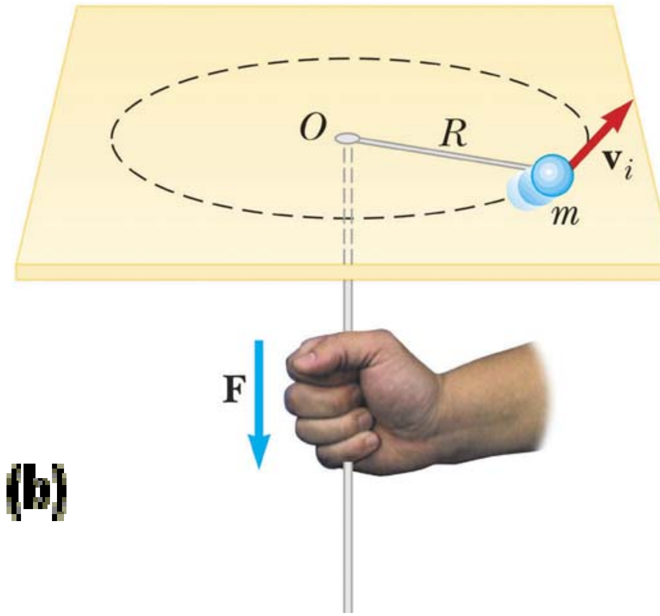

eixo de precessão
Giro
precessão
P=mg
www.conviteafisica.com.br

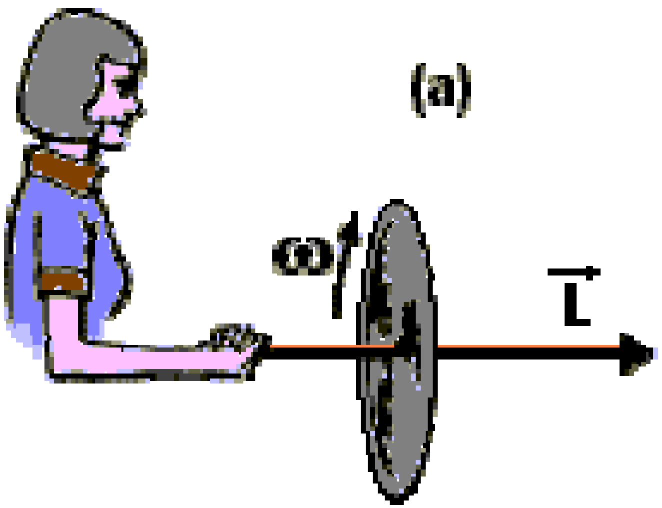

Precessão
Rotação

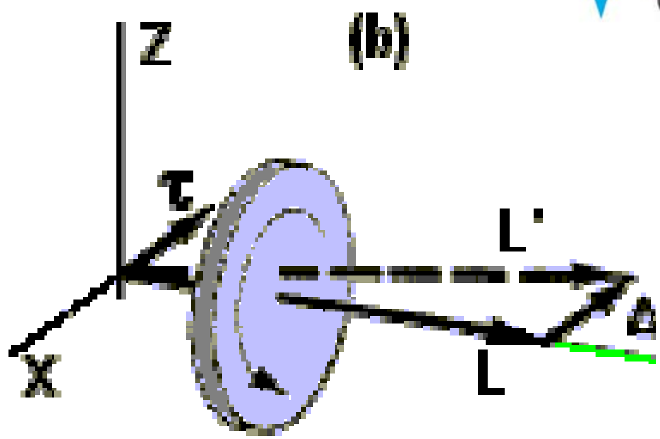

Pólo
23 ½°
Precessão
Órbita
da Terra

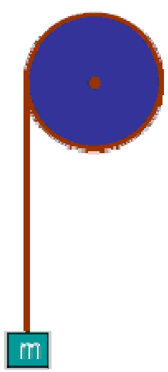

z
L
CM
n
r
Mg
y
O
τ
x
ΔL
Li
Lf

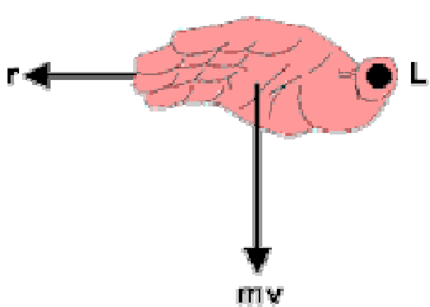
Aplicações











http://liftoff.msfc.nasa.gov/academy/rocket_sci/orbmech/angular_momentum.html