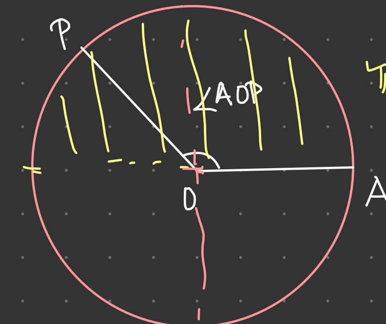
Descrição geométrica dos seno e cosseno

Ângulo. Ângulos são em geral definidos pelo comprimento de arco num círculo raio 1.
Aqui utilizamos a área da região associada ao ângulo: $\boxed{\pm\sqrt{r^2-x^2}}$

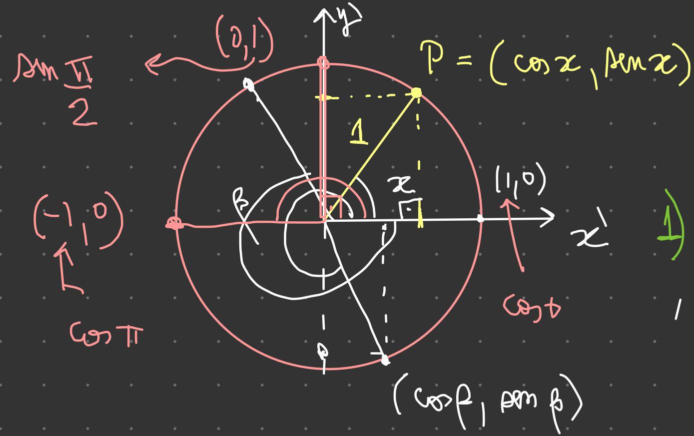
$$\angle AOP = 2\,\frac{\text{Área do setor}}{r^2} = 2\ \text{Área do setor}\ (r=1)$$



Definimos o ângulo $\angle AOP$ por x radianos usando o disco unitário $r=1$.

OBS: (i) Pode-se mostrar que a definição independe de $r>0$. (exercício)

(ii) O ângulo x varia de 0 a 2π com $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.



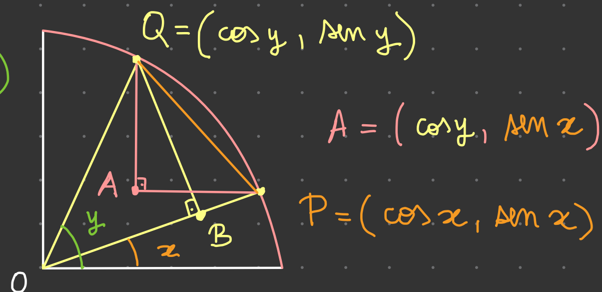
$$\boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1}$$ (Teo. de Pitágoras)

↑ em radianos

1) Note que as funções seno e cosseno estão definidos, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sentido anti-horário x é crescente, sentido horário decrescente. (As áreas se sobrepõem qdo necessário)

2) $\cos 0 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \pi = -1$. (Valores especiais)

3)



$|AQ| = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x$ $\quad |AP| = \cos x - \cos y$

$\therefore |PQ|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2$

Por outro lado, $|PQ|^2 = |PB|^2 + |BQ|^2$

(*) $\rightsquigarrow |PQ|^2 = (1 - \cos(y-x))^2 + \operatorname{sen}(y-x)^2$

(*) $\cos(y-x) = 1 - |PB| \rightsquigarrow |PB| = 1 - \cos(y-x)$

$|BQ| = \operatorname{sen}(y-x)$

$|PQ|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2$ e $|PQ|^2 = (1 - \cos(y-x))^2 + \operatorname{sen}(y-x)^2$

Por um lado, $|PQ|^2 = \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y$

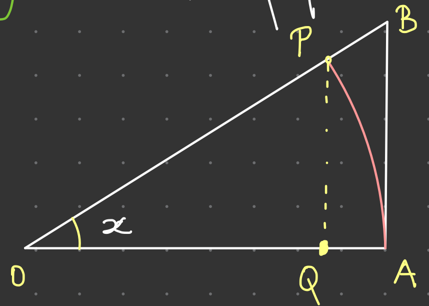
$= 2 - 2(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y).$

Por outro $|PQ|^2 = 1 - 2\cos(y-x) + \cos^2(y-x) + \operatorname{sen}^2(y-x)$

$= 2 - 2\cos(y-x)$

que nos dá $\cos(y-x) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

4) A última propriedade fundamental



$$\text{Área } \Delta_{OQP} < \frac{x}{2} < \text{Área } \Delta_{OAB} \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\boxed{P = (\cos x, \operatorname{sen} x)}$

(i) $$\text{Área } \Delta_{OAB} = \frac{|AB||OA|}{2} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|PQ|}{|OQ|} \rightsquigarrow |AB| = \frac{|PQ|\,\cancelto{1}{|OA|}}{|OQ|} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Semelhança de triângulos

(ii) $$\text{Área } \Delta_{OQP} = \frac{|PQ||OQ|}{2} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$$

Como $\text{Área } \Delta_{OQP} < \dfrac{x}{2} < \text{Área } \Delta_{OAB}$

temos $\dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x < \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

Veja que $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0 \rightsquigarrow 0 < \cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$

que é equivalente a $0 < \cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < \dfrac{1}{\cos x} \quad \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

$\therefore$ As funções seno e cosseno geométricas satisfazem as 4 propriedades fundamentais introduzidas axiomaticamente.