

MATRIZES COM ESTRUTURA

É ACONSELHÁVEL BALANCEAMENTO + CONDENSACÃO PIVOTAL



$$Ax = b$$

$$l_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

DIVIDIR A LINHA i DO SISTEMA POR l_i , $1 \leq i \leq n$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A}x = \tilde{b}; \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_i}; \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l_i}$$

OBS: SE OS NÚMEROS l_i TIVEREM ORDENS DE GRANDEZA PRÓXIMAS, ENTÃO NÃO É NECESSÁRIO BALANCEAR A MATRIZ

CASOS ONDE NÃO É NECESSÁRIO

BALANCEAR E NÃO USAR CONDENSACÃO PIVOTAL

1) MATRIZES INVERSÍVEIS, DIAGONAL DOMINANTES

$$\det(A) \neq 0; \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

OBS: EM MUITAS APLICAÇÕES, APARECEM ESTAS MATRIZES
(CASO PARTICULAR: MATRIZES ESTRITAMENTE DIAGONAL DOMINANTES)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

LEMA SE A FOR ESTRITAMENTE DIAGONAL DOMINANTE, ENTÃO A É INVERSÍVEL

DEM: EXERCÍCIO)

POR QUE NÃO É NECESSÁRIO USAR BALANCEAMENTO E CONDENSACÃO PIVOTAL COM MATRIZES DIAGONAL DOMINANTES INVERSÍVEIS?

PENSEMOS EM BALANCEAMENTO IMPLÍCITO. QUAL SERIA A LINHA DO PIVÔ PARA A CONDENSACÃO PIVOTAL? COMO A É DIAGONAL DOMINANTE, $\lambda_i = |a_{ii}|$, $1 \leq i \leq n$. SE DIVIDÍSSEMOS A LINHA i POR λ_i , EM CADA LINHA TERÍAMOS 1 NA DIAGONAL E ELEMENTOS COM MÓDULO ≤ 1 FORA DA DIAGONAL

1ª COLUNA DE $\tilde{A}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{21} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n1} \end{pmatrix}$; $|\tilde{a}_{k1}| \leq 1$, $\forall k > 1$

A LINHA DO PIVÔ É A PRIMEIRA. NÃO HÁ TROCA DE LINHAS APÓS A 1ª ETAPA

$$\begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

TAMBÉM É DIAGONAL DOMINANTE E INVERSÍVEL (SITUAÇÃO "QUASE" IDEAL)

CASO PARTICULAR INTERESSANTE:

MATRIZES DIAGONAL DOMINANTES INVERSÍVEIS, COM ESTRUTURA DE BANDA

$$\begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & b_u & & \\ & & \vdots & & \\ & & b_l & & \\ & 0 & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{ij} = 0 \text{ se} \\ j > b_u \text{ ou } i > b_l \\ \text{BANDA SUPERIOR } b_u \\ \text{BANDA INFERIOR } b_l \end{array}$$

TEOREMA: SUPONHA QUE A TEM BANDA SUPERIOR b_u E BANDA INFERIOR b_l , E QUE É POSSÍVEL FAZER A DECOMPOSIÇÃO LU DE A SEM TROCA DE LINHAS. ENTÃO, L TEM BANDA INFERIOR b_l E U TEM BANDA SUPERIOR b_u .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & b_l & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & b_u & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

2) A É SIMÉTRICA DEFINIDA POSITIVA (SDP)

$$a_{ii} = a_{ii}, \quad 1 \leq i, j \leq n; \quad \underbrace{\langle x, Ax \rangle}_{\text{PRODUTO INTERNO USUAL DO } \mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

NOTE QUE, SE NÃO NOS PREOCUPARMOS COM GRÃOS DE ARREDONDAMENTO, PODEMOS FAZER A DECOMPOSIÇÃO LU DE A SEM TROCA DE LINHAS. (OS MENORES PRINCIPAIS DOMINANTES SÃO POSITIVOS E PORTANTO $\neq 0$).

$$A = L \cdot U$$

$$A \text{ SPD} \Rightarrow u_{ii} > 0, 1 \leq i \leq n$$

$$\text{SEJA ENTÃO } D = \begin{pmatrix} u_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = L D (D^{-1} U); \text{ A SIMÉTRICA} \Rightarrow D^{-1} U = L^T$$

$$A = L D L^T \text{ ("FAMOSA" DECOMPOSIÇÃO } LDL^T)$$

$$\text{SEJA } D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$A = L D^{1/2} D^{1/2} L^T = \underbrace{L D^{1/2}}_{\tilde{L}} (L D^{1/2})^T = \tilde{L} \tilde{L}^T \text{ (CHOLESKY)}$$